Indice

Capitolo 1

Introduzione

Una delle più note conseguenze della meccanica quantistica è il principio di indeterminazione di Heisenberg. Esso, nella sua formulazione più generale, stabilisce un limite inferiore al prodotto delle indeterminazioni di due osservabili non commutanti di un sistema quantistico in un qualunque stato.

Se in uno stato il prodotto delle indeterminazioni assume questo valore minimo, tale stato è detto di minima indeterminazione per la coppia di osservabili.

Ora, per uno stato di minima indeterminazione, imponendo che il prodotto non cambi, si possono variare le indeterminazioni delle due osservabili in modo che una aumenti di un certo fattore, mentre l'altra diminuisca, venendo moltiplicata per l'inverso di tale fattore. È chiaro che una delle distribuzioni viene "ristretta" mentre l'altra viene "sparpagliata" rispetto allo stato iniziale. Col termine *squeezing* viene indicato proprio il processo di restringimento di una distribuzione di probabilità.

Ponendo $\alpha = \mathrm{e}^{-2\rho}$, dove $\alpha < 1$ è il fattore di diminuzione di una delle indeterminazioni, ρ è detto fattore di squeezing.

Un esempio di squeezing, che si realizza nel contesto dell'ottica quantistica, è lo squeezing in quadratura. Si definisce quadratura di un modo del campo elettromagnetico l'osservabile $a_\phi = \frac{1}{2}(a^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})$ dove a ed $a^\dagger$ sono gli operatori di distruzione e creazione; essa è chiaramente autoaggiunta.

Ora, si può verificare che lo stato di vuoto è per a_ϕ ed $a_{\phi+\frac{\pi}{2}}$ uno stato di minima indeterminazione.

Si dimostra[1] che esiste un operatore unitario che realizza uno squeezing del vuoto nella quadratura a_ϕ. Si tornerà in seguito a parlare dello squeezing in quadratura per un modo ottico e si vedrà come esso si possa realizzare anche sperimentalmente [2].

Ora, quello che interesserà sarà lo squeezing in fase. La fase è il parametro θ della trasformazione $U_\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a^\dagger a\theta}$ per un oscillatore armonico (es. modo di radiazione) effettuata su di uno stato fissato ρ. Più in generale si tratterà della fase intesa come parametro θ della trasformazione $U_\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}F\theta}$, dove F è autoaggiunto e ha spettro $S \subseteq \mathbb{Z}$. Misurare la fase significa determinare θ sapendo che il sistema è in uno stato $U_\theta \rho U_\theta^\dagger$. Ad essa non corrisponde in genere alcun operatore autoaggiunto, perciò per stabilire come misurare la fase si dovrà ricorrere alla teoria quantistica della stima. Nell'ambito di tale teoria si può trovare la misura ottima per la fase, cioè quella misura che massimizza un dato criterio di bontà. Una definizione in termini matematici della distribuzione di probabilità di una misura di fase è quindi fornita da tale misura ottima.

Nella teoria dell'informazione, un parametro per stabilire la bontà di una comunicazione è l'S.N.R. (Signal to Noise Ratio). Se il sistema usato come canale è quantistico, si supponga di codificare l'informazione da trasmettere mediante un alfabeto costituito dai possibili valori assunti da una determinata grandezza fisica A del sistema canale. Il rumore è definito come[2] $\Delta^2 A$, mentre $\langle A \rangle$ è il segnale. L'S.N.R. è dato da $\frac{\langle A \rangle^2}{\Delta^2 A}$.

È chiaro che se, mantenendo il segnale costante, si riesce a diminuire il rumore, aumenta l'S.N.R.

Risulta allora evidente l'utilità dello squeezing in tale ambito.

[1] Per maggiori dettagli si veda [1]

[2] Con $\Delta^2 O$ si indica la varianza della distribuzione di probabilità dell'osservabile O, cioè $\langle (O - \langle O \rangle)^2 \rangle$.

Per quanto riguarda in particolare lo squeezing in fase, tuttavia, l'applicazione di gran lunga più importante è nel campo dell'interferometria, dove, riducendo il rumore, si potrebbe chiaramente migliorare la precisione della misura dello sfasamento. Una delle più immediate conseguenze di tale miglioramento potrebbe essere la miglior accuratezza delle antenne gravitazionali nel rivelare eventuali onde gravitazionali.

In ogni caso è evidente che lo squeezing in fase è utile se avviene qualunque sia la fase da rivelare. Per soddisfare questa condizione esso deve allora essere realizzato da una mappa lineare sull'insieme degli stati, covariante[3] per il gruppo di spostamento di fase, cioè l'applicazione successiva di uno spostamento di fase e della mappa di squeezing ad uno stato deve dare lo stesso risultato dell'applicazione della mappa di squeezing ed in seguito dello spostamento di fase.

Poichè si vorrebbe realizzare in termini dinamici tale mappa, essa deve rappresentare effettivamente la dinamica del sistema. Per questo motivo deve soddisfare, oltre ad altre condizioni di cui si parlerà in seguito diffusamente, il requisito di *completa positività*. Per il momento basti sapere che questo equivale a richiedere che, tenendo in considerazione l'eventuale correlazione con un sistema isolato da quello di cui ci si occupa, la dinamica del sistema composto sia data da una mappa positiva, che conservi cioè la positività della ρ che descrive lo stato del sistema. Come si vedrà la positività è una proprietà di cui uno stato fisico deve godere; la completa positività della mappa, che appare quindi un requisito necessario, è una condizione più forte della semplice positività.

Ora, nella ricerca di una mappa che realizzi lo squeezing in fase ci si è accorti che alcune mappe che lo realizzano non sono completamente positive. Poichè, anzi, la loro forma infinitesima è sempre l'opposta di quella che dovrebbe avere una mappa completamente positiva, si è pensato che

[3]Si vedrà in dettaglio nel seguito come la covarianza si traduca in termini matematici, costituendo una proprietà notevole per la mappa di squeezing.

questa potesse essere una regola generale.

Ciò che questo lavoro si propone di mostrare è che effettivamente lo squeezing isotropo in fase corrisponderebbe ad una mappa non completamente positiva, e addirittura la forma infinitesima di una mappa che lo realizzasse sarebbe l'opposta di quella di una mappa completamente positiva. Proprio il segno meno, che compare davanti alla forma infinitesima della mappa, permette di concludere che questo processo non è realizzabile in quanto corrisponderebbe ad un'inversione della freccia del tempo, definita, come si chiarirà in seguito, in base al comportamento dei sistemi quantistici aperti.

Nel secondo capitolo si affronteranno la teoria quantistica della misurazione, che propone il concetto generale di misura, e la teoria quantistica della stima che, tramite le strategie di ottimizzazione, permette di individuare la miglior misura possibile per la fase e di definire tramite questa la distribuzione di probabilità della fase, risultato altrimenti non concepibile per via dell'assenza di un operatore autoaggiunto corrispondente a tale grandezza.

Nel terzo capitolo si concentrerà l'attenzione sui sistemi aperti, presentandone la dinamica e ricavando la forma dell'equazione che la governa, la *master equation*, nel caso in cui la sua forma infinitesima sia limitata e nel caso in cui essa sia covariante per un gruppo compatto, quale quello di spostamento di fase.

Nell'ultimo capitolo si specificherà ulteriormente la forma della master equation, adattandola alla richiesta di covarianza per l'azione del gruppo di spostamento di fase. Si calcolerà quindi la variazione dell'indeterminazione in fase, dopo aver ridefinito l'indeterminazione in modo molto generale, consistentemente con la periodicità della fase. Tale calcolo mostra che entro certi termini, specificati con chiarezza alla fine del capitolo, lo squeezing in fase corrisponde in effetti all'inversione della freccia del tempo. Una conseguenza interessante del calcolo è la scoperta di una master equation che preserva l'indeterminazione in fase.

Capitolo 2

Teoria quantistica della stima della fase

Il motivo per cui si introduce qui la teoria quantistica della stima della fase è che per definire lo squeezing in fase è necessario disporre di una definizione rigorosa di "misura della fase" e di "distribuzione di probabilità della fase". Questi due concetti, come si vedrà, non sono definiti se ci si limita a considerare le grandezze fisiche osservabili nella teoria quantistica della misurazione.

Si introdurrà perciò la teoria quantistica della stima e si definirà con precisione il concetto di *fase quantistica* con tutto ciò che ad esso concerne.

2.1 Teoria quantistica della misurazione

Ad un generico sistema quantistico S è associato uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Gli stati del sistema sono in corrispondenza biunivoca con gli operatori statistici, o operatori densità, su $\mathcal{H}$, cioè quella particolare classe $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ di operatori lineari autoaggiunti ρ che godono delle proprietà:

$$\rho \geq 0 \ , \quad \rho \ \text{di classe traccia}, \quad \mathrm{Tr}[\,\rho\,] = 1 \ .$$

Si può dimostrare che le ρ formano un insieme convesso, i cui punti estremi sono gli stati puri $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$. Uno stato ρ è individuato da tutte le distribuzioni di probabilità cui danno luogo le possibili misure sul sistema S in tale stato. Sia Σ un insieme misurabile corrispondente ai possibili risultati di una misura[1]. Si definisce misura quantistica a valori in Σ la mappa affine $\rho \mapsto \mu_\rho(B)$, $B \in \mathcal{A}(\Sigma)$ dall'insieme degli stati del sistema S all'insieme delle distribuzioni di probabilità su Σ. Si interpreta $\mathrm{d}\mu_\rho(u)$, con $u \in \Sigma$, come distribuzione di probabilità dei risultati della misura sul sistema S nello stato ρ.

Si introduce ora il concetto di risoluzione dell'identità, che in seguito sarà indicato con la sigla POM (Positive Operator-valued Measure):

Definizione 2.1.1 *Si dice risoluzione dell'identità un insieme M di operatori $M = \{M(B)|\ B \in \mathcal{A}(\Sigma)\}$ con le proprietà:*

1. $M(\emptyset) = 0 \qquad M(\Sigma) = \mathbb{I}$
2. $M(B) \geq 0$
3. $\forall\{B_i\}$ *partizione numerabile di* $B \in \mathcal{A}(\Sigma)$
   $M(B) = \sum_i M(B_i)$.

Si può ora enunciare il seguente teorema [3], di notevole importanza per chiarire l'utilità delle POM nella teoria quantistica della misurazione:

Teorema 2.1.1 *Sia $\rho \mapsto \mu_\rho$ una misura a valori in Σ. Allora esiste un'unica POM M* in $\mathcal{H}$ *t.c.*

$$\mu_\rho(B) \equiv \mu_\rho^M(B) = \mathrm{Tr}[\,\rho M(B)\,] \qquad B \in \mathcal{A}(\Sigma)\ . \tag{2.1}$$

Viceversa, sia M una POM in $\mathcal{H}$; allora M definisce una misura a valori in Σ mediante la (2.1)

[1]Poiché si ha a che fare con grandezze fisiche, sarà $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$, con la topologia degli aperti di Σ, $\mathcal{A}(\Sigma)$.

Un ruolo particolare è svolto dalle POM ortogonali, cioè quelle POM che godono della proprietà:

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset \ \Rightarrow M(B_1)M(B_2) = 0 \ . \tag{2.2}$$

Questa condizione, come dimostrato in [3], è equivalente a:

$$M(B)^2 = M(B) \qquad \forall B \in \mathcal{A}(\Sigma) \ . \tag{2.3}$$

Tali POM sono punti estremi[2] dell'insieme delle POM. La loro importanza è legata al seguente teorema:

Teorema 2.1.2 *Sia X un operatore lineare autoaggiunto su $\mathcal{H}$. Allora esiste un'unica POM ortogonale $E(B)$ t.c.*

1. $\langle\psi|X|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \langle\psi|E(\mathrm{d}\lambda)|\psi\rangle \qquad \psi \in \mathcal{D}$
2. $\|X\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \langle\psi|E(\mathrm{d}\lambda)|\psi\rangle \qquad \psi \in \mathcal{D}$
3. $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D} \qquad \mathcal{D} = \{\psi \in \mathcal{H}| \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \langle\psi|E(\mathrm{d}\lambda)|\psi\rangle < \infty\}$.

Per la dimostrazione si vedano [3, 4].

Le POM ortogonali sono quindi associate alla misura delle osservabili; le relative misure sono dette semplici.

Nei casi reali, tuttavia, queste non sono le uniche misure possibili. Proprio da questo fatto emerge la possibilità di effettuare misure con POM non ortogonali.

Come esempio si consideri un apparato di misura costituito da una parte microscopica detta *probe* ed una macroscopica indicata come *display*; si suppone che l'apparato funzioni in modo che il display effettui la misura di una grandezza fisica sul sistema correlato "oggetto + probe"

[2] In genere non è vero invece che tutti i punti estremi dell'insieme delle POM sono POM ortogonali; è anzi dimostrato (si veda [3]) che l'unico caso in cui ciò si verifica è quando lo spettro Σ ha due valori: $\Sigma = \{a, b\}$

$(S+P)$ dopo che oggetto S e probe P abbiano interagito. La statistica della misura, in accordo con la (2.1), è data da:

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mathrm{Tr}_{S+P}[U\rho_S \otimes \rho_P U^\dagger E(B)] = \\ &= \mathrm{Tr}[\rho_S \otimes \rho_P U^\dagger E(B) U] \ ,\end{aligned}$$

dove U è l'evoluzione temporale del sistema $S+P$ nell'intervallo di tempo in cui avviene l'interazione. La traccia può essere effettuata in due passaggi successivi:

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mathrm{Tr}_S\Big[\rho_S \mathrm{Tr}_P[\rho_P U^\dagger E(B) U]\Big] = \\ &= \mathrm{Tr}_S[\rho_S M(B)] \ ,\end{aligned}$$

dove

$$M(B) = \mathrm{Tr}_P[\rho_P U^\dagger E(B) U] \ . \tag{2.4}$$

La POM $M(B)$ così ottenuta in genere non è ortogonale.

Un importante teorema dimostrato da Naimark in [5] enuncia:

Teorema 2.1.3 *Data una generica POM M in $\mathcal{H}$, esistono uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_P$, uno stato puro ρ_0 in $\mathcal{S}(\mathcal{H}_P)$, una POM E ortogonale in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_P$ t.c.*

$$\mu_\rho^M(B) = \mu_{\rho\otimes\rho_0}^E(B) \qquad \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \qquad B \in \mathcal{A}(\Sigma) \ .$$

Viceversa, dati uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_P$, uno stato puro ρ_0 in $\mathcal{S}(\mathcal{H}_P)$, una POM E ortogonale in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_P$, $(\mathcal{H}_P,\, \rho_0,\, E)$ definiscono $M(B)$ mediante la:

$$M(B) = \mathrm{Tr}_P[\,\rho_0 E(B)\,] \ .$$

Quanto detto permette di ambientare la teoria quantistica della misurazione in questo insieme "allargato" di misure. Con la teoria fin qui sviluppata è possibile effettuare misure di grandezze che non corrispondono al consueto concetto di osservabile quantistica, cui cioè non corrisponde un operatore autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ associato al sistema in considerazione.

2.2 Gruppi di spostamento ad un parametro e problemi covarianti di stima

Consideriamo ora i gruppi di spostamento ad un parametro, poiché da essi deriva il tipo di misura di cui si tratterà in questo scritto.

Un gruppo di spostamento ad un parametro è una rappresentazione unitaria in $\mathcal{H}$ del gruppo additivo reale (eventualmente modulo ω):

$$\theta \mapsto V_\theta \qquad \theta \in \mathbb{R} \, ,$$

con la proprietà:

$$V_{\theta_1} V_{\theta_2} = V_{\theta_1+\theta_2} \qquad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Questa rappresentazione è un gruppo continuo ad un parametro di operatori unitari in $\mathcal{H}$. Per tali gruppi vale il seguente teorema:

Teorema 2.2.1 *(di Stone) Dato un gruppo unitario continuo ad un parametro di operatori su $\mathcal{H}$, esiste un unico operatore autoaggiunto X su $\mathcal{H}$ t.c. $V_\tau = \exp(\mathrm{i}\tau X)$*

Un operatore unitario V_θ definisce un automorfismo dell'insieme $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ degli stati quantistici:

$$\rho \mapsto \rho_\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A} \rho \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A} \, .$$

Si consideri per semplicità uno stato puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ con $\psi \in \mathcal{D}(A)$

$$\rho_\theta = |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta| \qquad |\psi_\theta\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}|\psi\rangle \, .$$

Definizione 2.2.1 *Il problema covariante della stima quantistica*[3] *di θ consiste nel cercare il valore del parametro θ conoscendo lo stato base $|\psi\rangle\langle\psi|$.*

[3]Nel caso in cui il gruppo generato da A sia un gruppo di simmetria per il sistema

A questo scopo si consideri una generica grandezza osservabile O. Il valore d'aspettazione di O nello stato $|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|$ è definito come:

$$\langle O\rangle_\theta = \langle\psi_\theta|O|\psi_\theta\rangle \ .$$

Derivando rispetto a θ si ottiene:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\langle O\rangle_\theta = 2\mathrm{Im}\langle A\psi_\theta|O\psi_\theta\rangle \qquad \psi\in\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(O) \ .$$

Ora, definendo $\Delta_\theta^2(O) = \langle\psi_\theta|(O-\langle O\rangle_\theta)^2|\psi_\theta\rangle$ risulta

$$\Delta_\theta^2(A)\Delta_\theta^2(O) \geq \frac{1}{4}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\langle O\rangle_\theta\right|^2 \ . \tag{2.5}$$

Si supponga ora di voler stimare θ mediante una misura di O. La "bontà" della stima può essere misurata mediante lo scarto quadratico medio:

$$\begin{aligned}\langle(O-\theta)^2\rangle_\theta &= \langle O^2\rangle_\theta - \langle O\rangle_\theta^2 + \langle O\rangle_\theta^2 - 2\theta\langle O\rangle_\theta + \theta^2 = \\ &= \Delta_\theta^2(O) + (\langle O\rangle_\theta - \theta)^2 \ .\end{aligned}$$

Si definisce l'errore sistematico (bias) $d(\theta) = \langle O\rangle_\theta - \theta$. Usando la (2.5) si ottiene:

$$\langle(O-\theta)^2\rangle_\theta \geq d^2(\theta) + \frac{1}{4}\frac{|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\langle O\rangle_\theta|^2}{\Delta_\theta{}^2(A)} \ ,$$

quindi, usando la definizione di bias

$$\langle(O-\theta)^2\rangle_\theta \geq d^2(\theta) + \frac{1}{4}\frac{(1+d'(\theta))^2}{\Delta_\theta{}^2(A)} \ . \tag{2.6}$$

Una misura che sia esente da errore sistematico è detta "unbiased" ed ha $d(\theta)=0$, pertanto se O è una stima unbiased di θ la sua precisione non può scendere sotto il limite imposto dalla (2.6)[4]:

$$\langle(O-\theta)^2\rangle_\theta \geq \frac{1}{4\Delta^2(A)} \ . \tag{2.7}$$

Si supponga ora che esista un operatore autoaggiunto B che con A soddisfi la *relazione di commutazione canonica*:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi B} \ . \tag{2.8}$$

[4]Si noti che $\Delta_\theta^2(A)$ non dipende da θ, pertanto si porrà $\Delta^2(A)$ senza ulteriori specificazioni.

Preso allora un vettore $\psi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ si ha che:

$$\langle e^{-i\chi B}\psi | e^{i\theta A}\psi\rangle = e^{i\chi\theta}\langle e^{-i\theta A}\psi | e^{i\chi B}\psi\rangle \ .$$

Quindi, derivando rispetto a θ e χ e ponendo $\theta = \chi = 0$ si ottiene[5]:

$$2\mathrm{Im}\langle A\psi | B\psi\rangle = 1 \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \ . \tag{2.9}$$

In tal caso l'analoga della (2.5) è la nota relazione di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta^2(A)\Delta^2(B) \geq \frac{1}{4} \ . \tag{2.10}$$

In un problema covariante di stima A abbia una grandezza fisica coniugata B[6]; la (2.8) si può allora riscrivere:

$$e^{-i\theta A}e^{i\chi B}e^{i\theta A} = e^{i\chi(B+\theta)} \ ,$$

cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi\lambda}\langle\psi|e^{-i\theta A}E(d\lambda)e^{i\theta A}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(\lambda+\theta)}\langle\psi|E(d\lambda)|\psi\rangle$$
$$\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall\psi \in \mathcal{H} \ ,$$

ove E è la risoluzione spettrale di B.

Questa, per l'invertibilità della trasformata di Fourier, equivale alla condizione:

$$e^{-i\theta A}E(\Lambda)e^{i\theta A} = E(\Lambda_{-\theta}) \qquad \theta \in \mathbb{R},\ \Lambda \in \mathcal{A}(\mathbb{R}) \ , \tag{2.11}$$

dove $\Lambda_\phi = \{p \in \mathbb{R}|\ p = \lambda + \phi,\ \lambda \in \Lambda\}$

Una POM che gode della proprietà (2.11) è detta covariante, e la misura cui dà luogo soddisfa la condizione:

$$\mu^E_{\rho_\theta}(\Lambda) = \mu^E_{\rho_0}(\Lambda_{-\theta}) \ .$$

[5]Si può dimostrare che A e B non possono essere limitati, tuttavia se lo fossero la (2.9) si potrebbe scrivere equivalentemente: $[\,A, B\,] = i\mathbb{I}$, perciò in letteratura si usa spesso questa seconda condizione, tralasciando i problemi legati ai domini.

[6]Si noti che se B è coniugato ad A, la grandezza coniugata a B sarà $-A$.

Se B è coniugata ad A si ha allora:

$$\langle B\rangle_\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\mu_\theta^E(\mathrm{d}\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda+\theta)\mu_0^E(\mathrm{d}\lambda) = \langle B\rangle_0 + \theta \ ,$$

quindi, se $O = B - \langle B\rangle_0$, O costituisce una misura unbiased per il parametro θ, e $\Delta_\theta^2(O)$ non dipende da θ.

Dal ragionamento fatto si arguisce come, anche in assenza di una grandezza fisica coniugata ad A, una qualunque POM covariante possa fornire una stima unbiased per θ.

Questo fatto stabilisce un legame profondo tra POM covarianti e misure unbiased. Se B non esiste, peraltro, la POM covariante non può essere ortogonale: supponiamo infatti che esista $E(\mathrm{d}\lambda)$ ortogonale; si potrebbe allora definire

$$O = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda E(\mathrm{d}\lambda) \ ,$$

ed O sarebbe l'operatore coniugato ad A, poiché:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi O}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A}E(\mathrm{d}\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi\lambda}E_{-\theta}(\mathrm{d}\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(\lambda+\theta)}E(\mathrm{d}\lambda) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(\theta+O)} \ . \end{aligned}$$

Per generalizzare, si consideri un gruppo G di trasformazioni di una varietà differenziabile m-dimensionale Θ. Sia $g \mapsto V_g$ una rappresentazione continua di G su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. $M(\mathrm{d}\theta)$ sia una POM a valori in Θ. $M(\mathrm{d}\theta)$ è covariante rispetto alla rappresentazione $g \mapsto V_g$ se:

$$\begin{aligned} V_g^\dagger M(B) V_g = M(B_{g^{-1}}) \qquad & g\in G,\ B \in \mathcal{A}(\Theta) \\ & B_g = \{\theta\in\Theta |\ \theta = g\theta',\ \theta'\in B\} \ . \end{aligned}$$

In genere il parametro $\theta \in \Theta$ descrive alcuni aspetti del processo di preparazione. Sia ρ_0 lo stato corrispondente a θ_0, allora l'azione di V_g porta ρ_0 in:

$$\rho_\theta = V_g\rho_0 V_g^\dagger \qquad \theta = g\theta_0 \ .$$

Definizione 2.2.2 *Dato un gruppo di simmetria per un sistema quantistico, che agisca transitivamente*[7] *su una varietà differenziabile Θ, il problema covariante della stima di θ consiste nella ricerca di una misura del parametro (in genere a più componenti) θ, noto lo stato ρ_0.*

Sia $M(\mathrm{d}^m\theta)$ una POM covariante, e si effettui la misura corrispondente a tale POM:

$$\Pr(\hat{\theta} \in B|\theta) = \mathrm{Tr}[\,\rho_\theta M(B)\,] = \mathrm{Tr}[\,\rho_0 V_g^\dagger M(B) V_g\,] = \mathrm{Tr}[\,\rho_0 M(B_{g^{-1}})\,]\ .$$

Per cui risulta, ricordando che $\theta = g\theta_0$

$$\Pr(\hat{\theta} \in B_g|\theta) = \Pr(\hat{\theta} \in B|\theta_0)\ .$$

Ciò significa che, se lo stato in cui è preparato il sistema è uno stato ottenuto da ρ_0 mediante l'azione di un elemento della rappresentazione $g \mapsto V_g$, la distribuzione di probabilità su Θ viene cambiata in modo prevedibile (nei casi più semplici, ad esempio, viene traslata) e ciò permette di utilizzare $M(\mathrm{d}\theta)$ per stimare il parametro θ, fornendo una stima unbiased.

2.3 Teoria quantistica della stima

Si è visto che una POM covariante fornisce una stima unbiased per il parametro di un problema covariante di stima, ma ora ci si pone il problema di determinare quale POM fornisca la stima migliore del parametro. A tale scopo è stata elaborata la teoria quantistica della stima.

Nella formulazione più generale il problema affrontato è la determinazione della POM che meglio individui un dato parametro riguardante lo stato del sistema. Per fare questo è necessario definire rigorosamente cosa si intenda per "bontà" di una stima.

[7]Si dice che un gruppo G agisce transitivamente su di un insieme Θ nel caso in cui $\forall\theta_0 \in \Theta \quad \forall\theta \in \Theta, \quad \exists g \in G \quad \text{t.c.} \quad \theta = g\theta_0$

Si immagini che un sistema sia preparato in uno stato ρ_θ dove θ è un parametro che indica qualche caratteristica non meglio specificata dello stato di preparazione che non è perfettamente controllabile.

Data una POM $M(\mathrm{d}^m\theta)$ si cerca di determinare θ effettuando una misura con tale POM. La probabilità condizionata di ottenere un risultato nell'insieme B quando lo stato è ρ_θ è data da:

$$\Pr(\hat{\theta} \in B|\theta) = \mathrm{Tr}[\,\rho_\theta M(B)\,]\ .$$

La distribuzione di probabilità condizionata è:

$$p(\hat{\theta}|\theta)\mathrm{d}^m\hat{\theta} = \mathrm{Tr}[\,\rho_\theta M(\mathrm{d}^m\hat{\theta})\,]\ .$$

A questo punto si possono distinguere due possibili formulazioni [3, 6]:

1. *Formulazione Bayesiana*
   La distribuzione di probabilità a priori di θ sia $z(\theta)$, cioè la probabilità che lo stato iniziale sia ρ_θ sia data da $z(\theta)\mathrm{d}^m\theta$. Assegnata allora una *funzione costo* $C(\hat{\theta},\theta)$ che pesi il costo degli errori nella stima, il costo medio è:

$$\begin{aligned}\langle C\rangle &= \int_\Theta \mathrm{d}^m\theta\, z(\theta)\int_\Theta \mathrm{d}^m\,\hat{\theta} p(\hat{\theta}|\theta)C(\hat{\theta},\theta) = \\ &= \int_\Theta \mathrm{d}^m\theta\, z(\theta)\int_\Theta \mathrm{Tr}[\,\rho_\theta M(\mathrm{d}^m\hat{\theta})\,]C(\hat{\theta},\theta) = \\ &= \int_\Theta \mathrm{Tr}[\,W(\hat{\theta})M(\mathrm{d}^m\hat{\theta})\,]\ ,\end{aligned}$$

   dove $\qquad W(\hat{\theta}) = \int_\Theta \mathrm{d}^m\,\theta z(\theta)\rho_\theta C(\hat{\theta},\theta)$

   Volendo cercare la POM ottima per la misura di θ, si cerca allora quella che rende minimo il costo medio $\langle C\rangle$

   Le equazioni per la soluzione $M_0(\hat{\theta})$, come ricavato in [7, 8], hanno la forma:

$$\begin{aligned}&[\,W(\hat{\theta}) - \mathcal{Y}\,]M_0(\mathrm{d}^m\hat{\theta}) = 0 \\ &W(\hat{\theta}) - \mathcal{Y} \geq 0 \qquad \forall\hat{\theta}\in\Theta\end{aligned}$$

$$\langle C\rangle_{min} = \int_\Theta \mathrm{Tr}[\, W(\hat\theta) M_0(\mathrm{d}^m\hat\theta)\,] =$$
$$\mathrm{Tr}[\,\mathcal{Y}\int_\Theta M(\mathrm{d}^m\hat\theta)\,] = \mathrm{Tr}[\,\mathcal{Y}\,]\ .$$

L'operatore incognito $\mathcal{Y}$ è detto operatore di Lagrange.

2. *Formulazione minimax*
   Sia il costo medio nello stato ρ_θ

$$\begin{aligned}\langle C\rangle_\theta &= \int_\Theta \mathrm{d}^m\hat\theta\, p(\hat\theta|\theta) C(\hat\theta,\theta) = \\ &= \int_\Theta \mathrm{Tr}[\,\rho_\theta M(\mathrm{d}^m\hat\theta)\,] C(\hat\theta,\theta) = \\ &= \int_\Theta \mathrm{Tr}[\, W_\theta(\hat\theta) M(\mathrm{d}^m\hat\theta)\,]\ ,\end{aligned}$$

   dove $W_\theta(\hat\theta) = \rho_\theta C(\hat\theta,\theta)$.

   L'approccio minimax consiste nel cercare la POM che minimizza il costo medio massimo $\langle C\rangle_M = \max_\theta \langle C\rangle_\theta$.

Ancora a proposito della teoria quantistica della stima, nel caso sufficientemente generale in cui G e Θ sono compatti è dimostrato un teorema che sarà di importanza fondamentale nei prossimi paragrafi:

Teorema 2.3.1 *Per un problema di stima quantistica covariante la POM ottima che minimizza i costi bayesiano con*[8] $z(\theta) = cost = |\Theta|^{-1}$ *e minimax è la stessa ed è covariante.*

Per la dimostrazione si rimanda a [3]

2.4 Stima quantistica della fase dell'oscillatore armonico

Si consideri un oscillatore armonico quantistico, con hamiltoniana:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\ . \tag{2.12}$$

[8] $|B|$ indica la misura di Lebesgue dell'insieme B

Per semplicità si porrà $m = 1$.

Come è noto, l'estensione autoaggiunta di H si ottiene mediante gli operatori di creazione ($a^\dagger$) e distruzione (a) ed ha la forma:

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) , \tag{2.13}$$

dove a ed $a^\dagger$ sono definiti[9] come:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q + \mathrm{i}p) \quad , \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q - \mathrm{i}p) , \tag{2.14}$$

Il sistema ortonormale completo $\{|n\rangle\}$ è dato dagli autostati dell'operatore numero:

$$N = a^\dagger a .$$

Un'importante classe di vettori è quella degli stati coerenti:

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad \alpha \in \mathbb{C} ,$$

che tra le tante proprietà interessanti di cui godono hanno quella di essere autostati dell'operatore a, relativi all'autovalore α.

Definizione 2.4.1 *Si definisce ampiezza complessa di uno stato ρ il numero complesso:*

$$z = \mathrm{Tr}[\,\rho a\,] .$$

Se ρ è uno stato coerente $|\alpha\rangle\langle\alpha|$, in particolare, si ha che $z = \alpha$.

Si consideri adesso lo stato

$$\rho_\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi a^\dagger a} \rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi a^\dagger a} ;$$

[9] In realtà a ed $a^\dagger$ sono estensioni degli operatori a destra delle (2.14) tali che a ed $a^\dagger$ siano uno l'aggiunto dell'altro, ed il loro dominio di definizione è:

$$\mathcal{D}(a) = \mathcal{D}(a^\dagger) = \{\psi \in \mathcal{H}| \sum_{n=0}^{\infty} n|\langle n|\psi\rangle|^2 < \infty\} .$$

la sua ampiezza complessa è:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\,\rho_\varphi a\,] &= \mathrm{Tr}[\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi a^\dagger a}\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi a^\dagger a}a\,] = \mathrm{Tr}[\,\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi a^\dagger a}a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi a^\dagger a}\,] = \\ &= \mathrm{Tr}[\,\rho a\,]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\ .\end{aligned}$$

Si osserva dunque che $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi a^\dagger a}$ sposta la fase dell'ampiezza complessa di uno stato di φ radianti.

Le trasformazioni unitarie $U_\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a^\dagger a\varphi}$ formano una rappresentazione unitaria del gruppo $\mathbb{T}$, il gruppo di Lie compatto additivo dell'intervallo $[0, 2\pi)$ modulo 2π.

$\mathbb{T}$ è isomorfo al gruppo delle rotazioni attorno ad un asse spaziale fissato, quindi ad $SO(2)$ o ad $U(1)$, mentre topologicamente è diffeomorfo alla circonferenza unitaria. D'ora in poi, invece di $\mathbb{T}$, si userà equivalentemente il gruppo $U(1)$.

Se si considera φ come un parametro della ρ, detto *fase*, si può porre il problema della stima quantistica della fase, e cercare di ottimizzarlo.

Osservazione. *Il fatto che gli autovalori di N siano interi fa sì che l'azione del gruppo degli U_φ sia periodica, e che il gruppo sia quindi compatto. Se gli autovalori del generatore infinitesimo fossero genericamente reali, ogni autovettore avrebbe una propria periodicità, ma l'azione del gruppo non sarebbe globalmente periodica.*

Il problema di stima posto è covariante, e ciò facilita molto il compito di ottimizzarlo, in virtù del teorema (2.3.1); inoltre, vale un altro teorema che permette di semplificare i calcoli specificando la forma generale di una POM covariante (si veda [3]):

Teorema 2.4.1 *Una POM $M(\mathrm{d}\hat{\theta})$ covariante ha la forma:*

$$M(\mathrm{d}\hat{\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a^\dagger a\hat{\theta}}\xi_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^\dagger a\hat{\theta}}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{2\pi}\ . \tag{2.15}$$

Si prenderanno qui in considerazione funzioni costo $C(\hat{\theta}, \theta) = C(\hat{\theta} - \theta)$, pari nell'argomento $\hat{\theta} - \theta$ e periodiche di periodo 2π[10].

[10] La periodicità della funzione $C(x)$ è necessaria per avere una definizione sensata di costo degli errori, poiché la variabile θ è definita modulo 2π

La generica funzione costo $C(\hat{\theta}-\theta)$ ammette perciò lo sviluppo in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} C(\hat{\theta}-\theta) &= c_0 - \sum_{l=1}^{\infty} c_l \cos l(\hat{\theta}-\theta) = \\ &= c_0 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l (\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(\hat{\theta}-\theta)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l(\hat{\theta}-\theta)})\ . \end{aligned}$$

Se si restringe l'attenzione a funzioni con $c_l \geq 0\ \forall l \geq 1$ si ha comunque a disposizione una vasta classe di funzioni costo, comprendente le più importanti funzioni, come:

$$\begin{aligned} &C(x) = 4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &C(x) = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \\ &C(x) = -\delta_{2\pi}(x) \end{aligned}$$

Se ora si cerca la POM ottima nell'approccio bayesiano utilizzando come distribuzione di probabilità a priori $z(\theta) = (2\pi)^{-1}$, il costo medio da minimizzare[11] è:

$$\begin{aligned} \langle C\rangle &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{Tr}[\, z(\theta)\rho_\theta M(\mathrm{d}\hat{\theta})\,]\, C(\hat{\theta}-\theta) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{Tr}\left[\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{2\pi}\, \rho_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}a^\dagger a(\hat{\theta}-\theta)}\xi_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^\dagger a(\hat{\theta}-\theta)} C(\hat{\theta}-\theta)\right]\ . \end{aligned}$$

Poiché l'integrale $\hat{C}_\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, C(\phi-\theta) M_{-\theta}(\mathrm{d}\phi)$ non dipende da θ è possibile porre $\hat{C}_\theta = \hat{C}$ e riscrivere:

$$\langle C\rangle = \mathrm{Tr}[\, \rho_0 \hat{C}\,]\ .$$

Segue la dimostrazione che $\hat{C}_\theta$ non dipende da θ:

$$\hat{C}_\theta \ = \ c_0\mathbb{I} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \langle m|\xi_0|n\rangle |m\rangle\langle n|\ \cdot$$

[11]Si sa da teorema (2.3.1) che il risultato sarà valido anche per l'approccio minimax

$$\cdot\left\{ e^{i(-m+n-l)\theta} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi}\, e^{i(m-n+l)\phi} + \right.$$

$$\left. + e^{i(-m+n+l)\theta} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi}\, e^{i(m-n-l)\phi} \right\} =$$

$$= c_0 \mathbb{I} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{|m-n|=l} \langle m|\xi_0|n\rangle |m\rangle\langle n| \; . \qquad (2.16)$$

Ora, usando la (2.16), si ottiene per $\langle C\rangle$ l'espressione:

$$\begin{aligned} \langle C\rangle &= \mathrm{Tr}[\,\rho_0 \hat{C}\,] = c_0 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{|m-n|=l} \langle m|\xi_0|n\rangle \mathrm{Tr}[\,\rho_0 |m\rangle\langle n|\,] = \\ &= c_0 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{|m-n|=l} \xi_{0mn}\, \rho_{0nm} \; , \end{aligned} \qquad (2.17)$$

dove $O_{ij} = \langle i|O|j\rangle$

A questo punto si restringerà l'attenzione a stati puri $\rho_0 = |\psi\rangle\langle\psi|$. Sarà perciò $\rho_{0nm} = \psi_n \psi_m^*$. In tal caso l'espressione per $\langle C\rangle$ diventa:

$$\langle C\rangle = c_0 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{|m-n|=l} \xi_{0mn} \psi_n \psi_m^* \; .$$

Avendo scelto una classe di funzioni costo con $c_l \geq 0$ per $l \geq 1$, il minimo di $\langle C\rangle$ si ottiene quando la sommatoria

$$\sum_{|m-n|=l} \xi_{0mn} \psi_n \psi_m^*$$

è massima per qualunque l.

Usando una semplice disuguaglianza triangolare si vede che:

$$\sum_{|m-n|=l} \xi_{0mn} \psi_n \psi_m^* \leq \left| \sum_{|m-n|=l} \xi_{0mn} \psi_n \psi_m^* \right| \; ,$$

dove l'uguaglianza vale se la sommatoria è positiva[12].

[12]Che la sommatoria sia reale è evidente, poiché l'operatore $\hat{C}$ è autoaggiunto

Una seconda disuguaglianza triangolare dà:

$$\left|\sum_{|m-n|=l} \xi_{0mn}\psi_n\psi_m^*\right| \leq \sum_{|m-n|=l} |\xi_{0mn}\psi_n\psi_m^*| \ . \tag{2.18}$$

In questo caso l'uguaglianza vale se tutti i termini della sommatoria hanno lo stesso segno.

Le due condizioni insieme si traducono nella richiesta che tutti i termini siano positivi.

Se si scrive $\psi_i = |\psi_i|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi_i}$, è facile mostrare che, affinché tutti i termini siano positivi, dev'essere:

$$\xi_{0mn} = |\xi_{0mn}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi_m-\chi_n)} \ .$$

Ora, per operatori positivi vale la disuguaglianza $|O_{ij}| \leq \sqrt{O_{ii}O_{jj}}$.

Inoltre, perché $M(\mathrm{d}\theta)$ sia una POM, dev'essere:

$$\int_0^{2\pi} M(\mathrm{d}\theta) = \mathbb{I} \ ,$$

cioè:

$$\int_0^{2\pi} M(\mathrm{d}\theta) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\theta}\xi_{0mn}|m\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{0nn}|n\rangle\langle n| \ .$$

Questa è una risoluzione dell'identità se $\xi_{0ii} = 1 \quad \forall i$

Perciò nel caso di ξ_0 vale la disuguaglianza:

$$|\xi_{0mn}| \leq 1 \ .$$

Questo permette di effettuare la maggiorazione:

$$\sum_{|m-n|=l} |\xi_{0mn}||\psi_n||\psi_m| \leq \sum_{|m-n|=l} |\psi_n||\psi_m| \ .$$

Il massimo, cioè il valore assunto quando vale l'uguaglianza, si ottiene quando $|\xi_{0mn}| = 1 \quad \forall m,n \in \mathbb{N}$

Ciò che resta da verificare è che la ξ_0 così ottenuta sia positiva:

$$\xi_0 = \sum_{m,n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi_m-\chi_n)}|m\rangle\langle n| \ .$$

Se si effettua il cambio di base:

$$|m\rangle \mapsto |m'\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi_m}|m\rangle \ , \tag{2.19}$$

la ξ_0 nella nuova base è:

$$\xi_0 = \sum_{m,n=0}^{\infty} |m'\rangle\langle n'| \ .$$

Definizione 2.4.2 *Si definiscono stati della rappresentazione di Susskind-Glogower gli stati normalizzabili "alla Dirac"*

$$|\mathrm{e}(\phi)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}|n\rangle$$

di un oscillatore armonico, nella rappresentazione degli autostati del numero.

L'operatore ξ_0 è allora il proiettore sullo stato $|\mathrm{e}(0)\rangle$:

$$\xi_0 = |\mathrm{e}(0)\rangle\langle\mathrm{e}(0)| \ ,$$

ed è chiaramente positivo:

$$\langle\eta|\xi_0|\eta\rangle = |\langle\eta|\mathrm{e}(0)\rangle|^2 \geq 0 \qquad \forall\eta \in \mathcal{H} \ .$$

È così dimostrato che per stati puri la POM ottima è, nella rappresentazione $|n'\rangle$:

$$M(\mathrm{d}\theta) = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}|\mathrm{e}(\theta)\rangle\langle\mathrm{e}(\theta)| \ . \tag{2.20}$$

2.5 Teoria generale della stima della fase

Generalizzando quanto detto per l'oscillatore armonico unidimensionale si può definire misura di fase la misura di un parametro $\theta \in \Theta$, dove Θ è l'intervallo $[0, 2\pi)$ su cui agisce transitivamente un gruppo G di simmetria per il sistema in considerazione. Il gruppo G dev'essere isomorfo a $U(1)$.

Le rappresentazioni unitarie irriducibili di $U(1)$ sono unidimensionali e hanno la forma $V_\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \quad m \in \mathbb{Z}$.

Pertanto (si vedano [9, 10]) una qualunque rappresentazione di G in $\mathcal{H}$ ha la forma:

$$U_\theta = \bigoplus_{S \subseteq \mathbb{Z}} \nu_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \ ,$$

dove ν_m indica la molteplicità della rappresentazione $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$

In notazione di Dirac questa diventa:

$$U_\theta = \sum_{S \subseteq \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\nu_m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} |m_i\rangle\langle m_i| \ .$$

L'indice i è un eventuale indice di degenerazione.

Sappiamo dal teorema di Stone (2.2.1) che $U_\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}A\theta}$ con A autoaggiunto. In questo caso è evidente[13] che

$$A = \sum_{S \subseteq \mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{\nu_m} m |m_i\rangle\langle m_i| \ .$$

Quindi il generatore infinitesimo A del gruppo $U(1)$, detto di *spostamento di fase* o di *phase shift*, ha spettro a valori in $\mathbb{Z}$

Definizione 2.5.1 *Dato lo stato* $\rho_\theta = U_\theta \rho_0 U_\theta^\dagger$ *e noto lo stato* ρ_0*, la misura della fase di* ρ_θ *è una misura del parametro* θ*.*

Si affronterà ora il problema della stima della fase nei casi sufficientemente generali: $A = F$ con spettro $S = \mathbb{Z}$ e $A = G$ con spettro $S = \mathbb{Z}_{q+1} = \{0, ..., +q\}$ non degeneri. Per quanto riguarda il caso $S = \mathbb{N}$, vale quanto visto a proposito dell'oscillatore armonico, a meno della sostituzione di $a^\dagger a$ con $A = H$ dove H è il generico generatore infinitesimo di spostamento.

Rispetto al paragrafo precedente si introdurrà una ulteriore generalizzazione, che consiste nel prendere in considerazione una classe più ampia di stati rispetto a quelli puri:

[13] Infatti $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} U_\theta \big|_{\theta=0} = A$

Definizione 2.5.1 *Si definisce stato puro in fase uno stato ρ t.c. i suoi elementi di matrice sugli autostati del generatore infinitesimo di spostamento abbiano la forma:*

$$\rho_{mn} = |\rho_{mn}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi_m - \chi_n)} \ ,$$

escludendo gli stati la cui ρ ha elementi di matrice ρ_{ij} non nulli solo su tutte le sovradiagonali con $i - j = n \cdot k$ dove $n \in \mathbb{Z}$ e k è una costante intera[14] *diversa da 1.*

A proposito della degenerazione, una generalizzazione del calcolo al caso degenere si trova in [11]. Sia $|\psi\rangle\langle\psi|$ lo stato ρ_0. Sia poi $\{|n\rangle_i\}$ un sistema ortonormale completo di autovettori per il generatore infinitesimo A, con i indice di degenerazione. Su tale sistema $|\psi\rangle$ è rappresentato come:

$$\sum_{n\in S}\sum_{i=1}^{d_n} \psi_{n_i}|n\rangle_i \ ,$$

dove d_n è la degenerazione dell'autovalore n.

Se si pone

$$|n\rangle_{\parallel} = \sum_{i=1}^{d_n} \psi_{n_i}'|n\rangle_i \ ,$$

con

$$\psi_{n_i}' = \frac{\psi_{n_i}}{\left(\sum_{i=1}^{d_n} |\psi_{n_i}|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \ ,$$

a partire da $|n\rangle_{\parallel}$ si può, con il procedimento di Gram-Schmidt, costruire una base ortonormale per l'autospazio relativo all'autovalore n. A questo punto si può considerare il problema come se fosse non degenere nello

[14] Per tali stati, infatti, la fase è definita a meno di $\frac{2r\pi}{k}$ con $r \in \mathbb{N}$. Ciò è evidente se si considera $U_\phi \rho U_\phi^\dagger$. Esso è uguale a:

$$\sum_{m,n\in S} \rho_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\phi} = \sum_{m\in S}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \rho_{m+kl,m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kl\phi} \ ,$$

e non è distinguibile da $U_\psi \rho U_\psi^\dagger$ se $\psi = \phi + \frac{2r\pi}{k}$ con $r \in \mathbb{N}$.

spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\parallel$ generato dagli $|n\rangle_\parallel$, e la POM ottima è qualunque POM ottenuta con $M_\parallel(\mathrm{d}\phi) \oplus M_\perp(\mathrm{d}\phi)$, dove $M_\parallel(\mathrm{d}\phi)$ è la POM ottima ricavata in $\mathcal{H}_\parallel$ e $M_\perp(\mathrm{d}\phi)$ è qualunque POM in $\mathcal{H}_\perp = \mathcal{H}_\parallel^\perp$.

Tale generalizzazione vale solo per stati puri o per misture di stati puri sullo stesso sottospazio $\mathcal{H}_\parallel$, che siano pure in fase[15].

Si procederà ora al calcolo. D'ora in poi si supporrà che il generatore non sia degenere, ovvero che ci si stia limitando a considerare stati puri in fase su un dato sottospazio $\mathcal{H}_\parallel$ di $\mathcal{H}$.

Si verifica facilmente che valgono ancora le (2.16) e (2.17):

$$\hat{C} = c_0\mathbb{I} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{|m-n|=l} \langle m|\xi_0|n\rangle |m\rangle\langle n| \tag{2.21}$$

$$\langle C\rangle = c_0 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{|m-n|=l} \xi_{0mn}\rho_{0nm} \; . \tag{2.22}$$

Anche qui si considererà solo la classe di funzioni costo, sufficientemente ampia, con $c_l \geq 0$ per $l \geq 1$, che sarà indicata come classe di Holevo.

Ripetendo i calcoli visti nel paragrafo precedente si vede che per minimizzare il costo medio bisogna massimizzare la sommatoria:

$$\sum_{|m-n|=l} \xi_{0mn}\rho_{0nm} \; .$$

Ripetendo poi le maggiorazioni fatte nel paragrafo precedente si ottiene, come lì, che la POM ottima è quella con:

$$\xi_{0mn} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi_m - \chi_n)} \; ,$$

dove $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi_m - \chi_n)}$ è la fase di ρ_{0mn}.

Essendo la stessa POM ottenuta in precedenza non occorre ripetere la dimostrazione della positività. Si opera il cambio di base (2.19) e si generalizza la definizione degli stati di Susskind-Glogower:

$$|\mathrm{e}(\phi)\rangle = \sum_{n\in S} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}|n\rangle \; . \tag{2.23}$$

[15]Si possono definire stati puri in fase in $\mathcal{H}_\parallel$ perchè in questo spazio il generatore non è degenere, pertanto ci si può ricondurre a quanto visto per l'oscillatore armonico.

Pertanto in qualunque caso la POM ottima per stati puri in fase è:

$$M(\mathrm{d}\phi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}|\mathrm{e}(\phi)\rangle\langle\mathrm{e}(\phi)| \ .$$

Una interessante osservazione, se si considera F con spettro $\mathbb{Z}$, è che in questo caso la POM ottima è ortogonale. Infatti:

$$\begin{aligned} M_\phi(\mathrm{d}\phi)M_\psi(\mathrm{d}\psi) &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\phi}|m\rangle\langle n| \sum_{r,s\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(r-s)\psi}|r\rangle\langle s| \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\psi}{2\pi} = \\ &= \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\psi-\phi)} \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\phi-s\psi)}|r\rangle\langle s| \frac{\mathrm{d}\psi}{2\pi} \ . \end{aligned}$$

Poiché vale l'uguaglianza:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\psi-\phi)} = \mathrm{d}\phi\,\delta(\psi-\phi) \ ,$$

si ha che:

$$\begin{aligned} M_\phi(\mathrm{d}\phi)M_\psi(\mathrm{d}\psi) &= \frac{\mathrm{d}\psi}{2\pi}\sum_{m,s\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-s)\psi}\mathrm{d}\phi\,\delta(\psi-\phi) = \\ &= M_\psi(\mathrm{d}\psi)\delta(\psi-\phi)\mathrm{d}\phi \ . \end{aligned}$$

Si può allora definire un operatore autoaggiunto corrispondente alla fase, coniugato canonicamente ad F:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \phi M(\mathrm{d}\phi) \ .$$

Ora si dimostrerà che la POM $M(\mathrm{d}\phi) = \sum_{m,n\in S} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\phi}|m\rangle\langle n|\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}$ è ottima solo per stati puri in fase, cioè:

Teorema 2.5.1 *Uno stato ρ è puro in fase $\Leftrightarrow$ l'unica*[16] *POM ottima per ρ è* $\sum_{m,n\in S} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\phi}|m\rangle\langle n|\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}$

[16] L'unicità è necessaria al fine di escludere quegli stati per cui $\rho_{mn} \neq 0$ solo per $n-m = kq$. Per tali stati, se soddisfano il requisito $\rho_{mn} = |\rho_{mn}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi_m-\chi_n)}$, nella base in cui gli elementi di ρ sono tutti reali positivi o nulli, una POM ottima è della forma prevista dalle ipotesi del teorema, tuttavia si possono modificare arbitrariamente gli elementi ξ_{mn} con $m-n = kq$ senza perdere il requisito di ottimità.

Dimostrazione. L'operatore $\mathbb{I} - M(\mathrm{d}\phi)$ è definito non negativo, perciò:

$$\langle\psi|\psi\rangle \geq \langle\psi|M(\mathrm{d}\phi)|\psi\rangle \ . \tag{2.24}$$

Poiché $M(\mathrm{d}\phi)$ è autoaggiunto, non negativo e di classe traccia, si può definire l'operatore $\sqrt{M(\mathrm{d}\phi)}$, che per la (2.24) è limitato, perciò appartiene alla C^*-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ degli operatori limitati e densamente definiti su $\mathcal{H}$.

L'operatore $M(\mathrm{d}\phi)$ si può scrivere come $\sqrt{M(\mathrm{d}\phi)}^2$, e quindi a sua volta appartiene alla C^*-algebra, ed è limitato.

Si sa che $M(\mathrm{d}\phi)$ è definito non negativo, e perciò (si veda [12]) si può scrivere come:

$$M(\mathrm{d}\phi) = O^\dagger O \qquad O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ .$$

Per stati generici, non puri in fase, il problema nella ricerca della POM ottima è che, in genere, non si può porre $|\xi_{0mn}| = 1$ in quanto una ξ siffatta non è necessariamente definita non negativa.

Ciò che è certo è che la POM ottima ξ_{0mn} deve avere la stessa fase di ρ_{0mn}, come si vede dalla disuguaglianza (2.18).

Con la condizione $\xi_0 = O^\dagger O$, abbiamo che:

$$\xi_{0mn} = \sum_{t\in S} O^\dagger_{mt} O_{tn} = \sum_{t\in S} O^*_{tm} O_{tn} \ .$$

La successione $\mathcal{O}_m = \{O_{tm}\}$ è in ℓ^2, infatti:

$$\sum_{t\in S} O^*_{tm} O_{tm} = \xi_{0mm} = 1 < \infty \ .$$

È allora possibile interpretare ξ_{0mn} come prodotto scalare di elementi di ℓ^2:

$$\xi_{0mn} = (\mathcal{O}_m, \mathcal{O}_n) \ .$$

In ℓ^2, naturalmente, vale la disuguaglianza di Schwartz:

$$|(\mathcal{O}_m, \mathcal{O}_n)| \leq \|\mathcal{O}_m\| \|\mathcal{O}_n\| = 1 \ .$$

Si sa che la disuguaglianza di Schwartz è soddisfatta con l'uguale nel caso in cui $\mathcal{O}_n = C_{nm}\mathcal{O}_m$, sicché:

$$\xi_{0mn} = (\mathcal{O}_m, C_{nm}\mathcal{O}_m) = C_{nm} \ .$$

Deve inoltre essere $C_{nm} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{mn}}$, e ϕ_{mn} dev'essere la fase di ρ_{0mn}.

È poi facile osservare che dev'essere:

$$\mathcal{O}_i = C_{ik}\mathcal{O}_k = C_{ik}C_{kj}\mathcal{O}_j = C_{ij}\mathcal{O}_j \ .$$

Pertanto:

$$\phi_{ij} = \phi_{ik} + \phi_{kj} = \phi_{ik} - \phi_{jk} \qquad \forall k$$

(ovviamente modulo 2π).

Fissiamo ora k, e sia $\phi_{ik} = \chi_i$. Allora:

$$\phi_{ij} = \chi_i - \chi_j \ .$$

Lo stato ρ_0 deve allora essere puro in fase, come volevasi dimostrare.

La proposizione inversa è già stata dimostrata precedentemente nel paragrafo.

2.6 Conclusione

Poiché non esiste in genere un operatore autoaggiunto associato alla fase, è stato necessario sviluppare la teoria della stima, in modo da poter definire la misura della fase come quella che si effettua mediante la POM ottima. In questo modo si ha a disposizione una definizione rigorosa di "distribuzione di probabilità" di una misura di fase, che è proprio l'oggetto su cui deve agire uno squeezing in fase.

Inoltre la POM ottima è stata calcolata per una classe di stati sufficientemente ampia, costituita dagli stati "puri in fase". Per quanto riguarda stati non puri in fase, l'unico caso che crea problemi è quello, già visto, in cui la ρ ha elementi ρ_{ij} non nulli solo su sovradiagonali con $i - j = kn$, dove k è una costante intera diversa da uno e $n \in \mathbb{Z}$.

Unica osservazione da aggiungere è che per $k = 0$ la ρ è diagonale nella rappresentazione degli autostati del generatore di phase shift.

Dire che in questa circostanza la fase "è definita a meno di $\frac{2\pi}{k}$" non ha evidentemente senso. In tal caso, infatti, dalla (2.17) si vede che $\langle C \rangle = c_0$, indipendentemente dalla ξ_0. Perciò qualunque POM è ottima. Se però si calcola la distribuzione di probabilità

$$\mathrm{Tr}[\,\rho_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}A\phi} \xi_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\phi}\,] \ ,$$

si ottiene:

$$\mathrm{d}p(\theta|\hat{\theta}) = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \ ,$$

cioè una distribuzione uniforme, quindi una totale indeterminazione in fase.

Per stati non puri in fase e non del tipo sopra descritto non è stata calcolata finora la POM ottima.

A questo punto, avendo una definizione di distribuzione di probabilità in fase si proseguirà cercando un'evoluzione che effettui uno squeezing in fase, cioè stringa tale distribuzione.

Capitolo 3

Evoluzione dei sistemi aperti. La master equation

Prima di dimostrare l'impossibilità dello squeezing isotropo in fase è necessario stabilire quale tipo di evoluzione possa darvi luogo. Per questo motivo qui di seguito sarà analizzato il più generale tipo di evoluzione dinamica, generalmente non reversibile, che comprende come caso particolare la dinamica hamiltoniana. Tale evoluzione è governata dalla master equation, che è l'equazione "del moto" di un sistema quantistico aperto. Nel prossimo capitolo si partirà proprio dalla più generale forma di master equation isotropa per cercare se, con una simile evoluzione, sia possibile realizzare un restringimento della distribuzione di probabilità della fase, cioè uno squeezing in fase.

3.1 Generalità su sistemi aperti ed irreversibilità

La meccanica hamiltoniana, quantistica e non, è in genere reversibile. Ciò significa che se si inverte l'asse dei tempi il tipo di equazione che esprime la dinamica non cambia.

Si consideri come esempio l'equazione di Schrödinger per una parti-

cella senza spin:
$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H\psi(t) \ .$$
Effettuando la coniugazione complessa:
$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial(-t)} \psi^*(t) = H\psi^*(t) \ .$$
Ciò significa che se $\psi(t)$ è soluzione dell'equazione di Schrödinger, lo è anche $\psi^*(-t)$, cioè la sua inversa temporale. Vale in generale il principio di microreversibilità (si veda [13]), che afferma:

Principio 3.1.1 *Se la legge del moto di un sistema conservativo è reversibile rispetto al tempo, l'hamiltoniana è reale, e viceversa.*

Per operatore reale si intende un operatore O su $\mathcal{H}$ t.c.
$$KOK^\dagger = O \ ,$$
con K operatore di time reversal.

In assenza di campi esterni, in generale, si assume che l'hamiltoniana sia reale per ogni sistema fisico chiuso, e questo giustifica l'affermazione al principio del paragrafo.

In natura, tuttavia, si ha a che fare con sistemi che evolvono con una direzione privilegiata nel tempo, ovvero per i quali l'evoluzione non è invertibile. Ad esempio, un sistema che si trova a contatto con un termostato, all'equilibrio termico, non si allontana mai dallo stato macroscopico di equilibrio, mentre se si trova in uno stato diverso, rilassa sempre verso l'equilibrio termico.

Questo comportamento è caratteristico dei sistemi aperti. Tutti i sistemi fisici, del resto, per quanto isolati, sono sempre, anche se in modo debolissimo, in interazione con l'universo circostante.

D'altra parte il secondo principio della termodinamica afferma l'irreversibilità di alcuni tipici processi di sistemi chiusi.

Sebbene l'irreversibilità dello scambio di calore tra un corpo caldo ed uno freddo, supposti isolati dall'ambiente, sia sostanzialmente diversa dall'irreversibilità del processo che porta un gas inomogeneo, a temperatura costante, all'omogeneità, vedremo che entrambe, dal punto di vista matematico, possono essere ricondotte alla stessa origine.

Come si è detto in precedenza, i sistemi hamiltoniani hanno una dinamica reversibile. In meccanica quantistica la dinamica di un sistema hamiltoniano è descritta dal gruppo degli operatori unitari di evoluzione temporale.

Per descrivere una dinamica irreversibile è allora necessario trovare il modo di dare una descrizione non hamiltoniana ad un sistema quantistico. Un suggerimento su come ciò si possa realizzare arriva dalla teoria della misurazione.

Un tipico esempio di processo irreversibile che si incontra senza dover considerare sistemi aperti o termodinamici è la riduzione dello stato in seguito ad una misura: tipicamente, se ρ è lo stato di un sistema prima della misura di un'osservabile $A = \sum a_i E_i$, con possibili risultati $\{a_i\}$, ed il risultato della misura è a_n, lo stato dopo la misura è:

$$\rho' = \frac{E_n \rho E_n}{\mathrm{Tr}[\, \rho E_n \,]} \ . \tag{3.1}$$

Se lo stato iniziale fosse ρ', esso rimarrebbe invariato. Non accade mai che durante una misura di A ρ' evolva in ρ, ma solo il viceversa. Nell'ambito della teoria della misurazione, si può ottenere la (3.1) da un'interazione tra il sistema e l'apparato di misura facendo la traccia parziale dello stato correlato evoluto con l'interazione sui gradi di libertà dell'apparato (per alcuni esempi si veda [14]).

Quanto detto suggerisce di cercare una equazione del moto non reversibile in modo analogo, considerando l'interazione del sistema aperto con un *bagno* o *riserva* R, che può rappresentare:

1. L'universo o comunque l'ambiente che contiene il sistema; nell'esempio del gas inomogeneo tale riserva è il termostato.

2. L'insieme dei gradi di libertà (generalmente microscopici) non controllabili. Nell'esempio dei sistemi termodinamici il sistema è de-

scritto dai gradi di libertà termodinamici, mentre la riserva è costituita da tutti gli altri gradi di libertà indipendenti.

Si può quindi notare, come si accennava in precedenza, che l'irreversibilità di sistemi aperti e sistemi termodinamici chiusi, sebbene sia data da cause fisicamente diverse, è riconducibile sotto l'aspetto matematico alla stessa genesi: il trascurare molti gradi di libertà di un sistema chiuso, mediante una traccia parziale.

In questo modo si lega l'irreversibilità alla dinamica di sistemi aperti in genere.

3.2 Semigruppi dinamici e mappe CP

Si sa che la dinamica reversibile di un sistema hamiltoniano è rappresentata dal gruppo degli operatori unitari di evoluzione temporale:

$$U(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht} \, .$$

Del resto è chiaro che la dinamica reversibile debba essere associata ad un gruppo: per ogni possibile evoluzione dev'essere possibile anche l'inversa, per cui se esiste $U(t)$ che porta da ψ_0 a ψ_t, deve appartenere al gruppo anche $U^\dagger(t)$ che porta ψ_t in ψ_0.

Intuitivamente si può perciò supporre che ad una dinamica irreversibile sia invece associato un semigruppo, cioè un insieme con le stesse proprietà di un gruppo ma in cui non necessariamente tutti gli elementi ammettono un elemento inverso.

È difficile stabilire a quali condizioni sul sistema $S + R$ la dinamica del sottosistema S sia associata ad un semigruppo. In molti casi fisici, tuttavia, come si legge in [15], le master equation ottenute sono della forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = L\rho \, ,$$

dove L, detto *liouvilliano*, è un operatore lineare sullo spazio di Banach degli operatori di classe traccia su $\mathcal{H}$, ed è il generatore infinitesimo di un semigruppo. Perciò alcuni autori ([15, 16]) hanno scelto di ergere a postulato fondamentale della dinamica dei sistemi aperti una legge semigruppale.

Sia $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ l'insieme degli operatori di classe traccia su $\mathcal{H}$; esso è uno spazio di Banach con la norma

$$\|\rho\| = \sup_{\{x_n\},\{y_n\}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n|\rho|y_n\rangle| \right\} < \infty \ ,$$

dove $\{x_n\}$ ed $\{y_n\}$ sono due sistemi ortonormali completi in $\mathcal{H}$ non meglio specificati.

Anche il suo duale, cioè l'insieme degli operatori limitati e densamente definiti su $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, è uno spazio di Banach[1], ed è dotato di una topologia debole*, indotta da $\mathcal{T}(\mathcal{H})$: dati $B_n \, , B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$w^* \lim_{n\to\infty} B_n = B \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (B_n, A) = (B, A) \qquad \forall A \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \ .$$

Definizione 3.2.1 *Una famiglia*[2] $\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \{\Lambda_t \in \mathcal{L}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))|\ t \geq 0\}$ *è un semigruppo dinamico per il sistema quantistico corrispondente ad* $\mathcal{H}$ *se e solo se:*

1. $\forall t \geq 0 \qquad \Lambda_t(\mathcal{B}_+(\mathcal{H})) \subseteq \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$
2. $\Lambda_t(\mathbb{I}) = \mathbb{I} \qquad \forall t \geq 0$
3. $\Lambda_t \Lambda_s = \Lambda_{t+s} \qquad \forall t, s \geq 0$
4. $w^* \lim_{t\to 0^+} \Lambda_t X = X \qquad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$[3] .
5. Λ_t *è ultradebolmente continuo,*
   cioè $w^* \lim_{t\to s} \Lambda_t X = \Lambda_s X \quad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

[1] Si indicherà con $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ l'insieme degli operatori classe traccia definiti non negativi

[2] Con $\mathcal{L}(B)$ si intende l'insieme degli operatori lineari sullo spazio B

[3] Si dice in tal caso che Λ_t converge ultradebolmente ad I. Il concetto di limite ultradebole è alla base della definizione della continuità ultradebole, definita nel punto 5

L'ultima condizione implica, come dimostrato in [17], che esista una mappa L, generalmente non limitata, t.c.

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| LX - \frac{\Lambda_t X - X}{t} \right\| = 0 \ .$$

Per derivare la forma generale del generatore infinitesimo L occorre formulare due ulteriori ipotesi:

1. Λ_t oltre che positivo deve essere completamente positivo (CP). Questa ipotesi ha un preciso significato fisico e pertanto, a differenza della seconda, non appare troppo restrittiva.

   Si supponga che il sistema aperto in considerazione venga esteso a comprendere un sistema hamiltoniano da esso isolato (per semplicità $H = 0$). La mappa che descrive la dinamica del sistema composto ha le proprietà:

   $$\Phi_t(X \otimes \mathbb{I}) = \Lambda_t(X) \otimes \mathbb{I}$$
   $$\Phi_t(\mathbb{I} \otimes Y) = \mathbb{I} \otimes Y \ .$$

   Anche se Λ_t è positiva non è detto che lo sia Φ_t. Tuttavia è chiaro che Φ_t dev'essere positiva, poiché rappresenta l'evoluzione di un sistema fisico composto.

   La richiesta di completa positività ha proprio questo scopo, ed è formulata nel modo seguente.

   Sia $\mathcal{H}$ associato ad un sistema, e Λ un operatore lineare su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; sia poi $\Phi_n : \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n \to \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n$ t.c.

   $$\Phi_n(X \otimes \mathbb{I}_n) = \Lambda(X) \otimes \mathbb{I}_n$$
   $$\Phi_n(\mathbb{I} \otimes E_{ij}) = \mathbb{I} \otimes E_{ij} \ ,$$

   dove $\mathbb{I}_n$ è l'identità in $\mathbb{C}^n$ e E_{ij} è la matrice complessa $n \times n$ con $(E_{ij})_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}$.

   Si definisce in tal caso $\Phi_n = \Lambda \otimes I_n$.

Definizione 3.2.2 *Λ è completamente positiva se Φ_n è positiva per qualunque n, e si scrive $\Lambda \in CP(\mathcal{H})$. Con $CP(\mathcal{H})_\sigma$ si intenderà invece l'insieme degli elementi ultradebolmente continui in $CP(\mathcal{H})$*

2. La seconda ipotesi è che il semigruppo sia continuo in norma. Tale ipotesi è un po' più restrittiva, ma si vedrà in seguito che il risultato a cui essa porta, cioè la forma di Lindblad, vale anche per i semigruppi dinamici di interesse per questo studio, con una sola riserva.

   Se la continuità ultradebole implica l'esistenza di un generatore L, la continuità forte ne implica la limitatezza (si veda [18]), e di conseguenza si può riformulare il punto 4 della definizione (3.2.1) ponendo:
   $$\lim_{t\to 0^+} \|\Lambda_t - \mathbb{I}\| = 0 \ .$$
   Inoltre si può scrivere $\Lambda_t = \exp(Lt)$, dove exp è definita tramite la serie esponenziale, che converge.

Una osservazione sulla prima ipotesi è che effettivamente una mappa positiva non è necessariamente CP. Si possono equivalentemente fare considerazioni sulla mappa diretta agente su $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ anziché su quella duale agente su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sia $\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^2$, e si consideri una generica $\sigma \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$.

$$\sigma = a|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + b|\downarrow\rangle\langle\downarrow| + c|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + c^*|\downarrow\rangle\langle\uparrow| \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{C} \ ,$$

dove $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ sono gli autostati della σ_z di Pauli.

La mappa $\Phi(\sigma)$ sia definita da:

$$\Phi(\sigma) = \sigma^T = a|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + b|\downarrow\rangle\langle\downarrow| + c|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + c^*|\uparrow\rangle\langle\downarrow| \ .$$

È chiaro che se $\sigma \geq 0$ anche $\Phi(\sigma) \geq 0$:

$$\begin{aligned} \langle\psi|\sigma^T|\psi\rangle &= (\psi_1^*\langle\uparrow| + \psi_2^*\langle\downarrow|)\ \sigma^T(\psi_1|\uparrow\rangle + \psi_2|\downarrow\rangle) = \\ &= \psi_1^* a\psi_1 + \psi_2^* b\psi_2 + \psi_1^* c^*\psi_2 + \psi_2^* c\psi_1 = \\ &= \langle\psi^*|\ \sigma|\psi^*\rangle \geq 0 \ , \end{aligned}$$

dove $|\psi^*\rangle = \psi_1^*|\uparrow\rangle + \psi_2^*|\downarrow\rangle$.

Si supponga ora di correlare il sistema in considerazione con un altro identico; lo spazio di Hilbert diventa $\mathcal{H}' = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

La matrice densità ρ dello stato:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\} ,$$

sarà:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}\{|\uparrow\rangle\langle\uparrow|_1 \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_2 + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_1 \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_2 + \\ &\quad -|\uparrow\rangle\langle\downarrow|_1 \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow|_2 - |\downarrow\rangle\langle\uparrow|_1 \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow|_2\} . \end{aligned}$$

Chiaramente $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}')$; se si applica $\Psi = \Phi \otimes I$ a ρ si ottiene:

$$\begin{aligned} \Psi(\rho) &= \frac{1}{2}\{|\uparrow\rangle\langle\uparrow|_1 \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_2 + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_1 \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_2 + \\ &\quad -|\downarrow\rangle\langle\uparrow|_1 \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow|_2 - |\uparrow\rangle\langle\downarrow|_1 \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow|_2\} . \end{aligned}$$

A questo punto è facile immaginare che $\langle\eta|\Psi(\rho)|\eta\rangle$ è negativo se si pone, ad esempio,

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2\} .$$

Infatti:

$$\langle\eta|\Psi(\rho)|\eta\rangle = -\frac{1}{2} .$$

La proprietà più notevole delle mappe $\Lambda \in CP(\mathcal{H})$ è che sono realizzabili mediante l'interazione del sistema S associato ad $\mathcal{H}$ con un sistema esterno R. Si verifica facilmente che se

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_R[\,\rho_0 U^\dagger (X \otimes I) U\,] ,$$

allora $\Phi \in CP(\mathcal{H})_\sigma$ e $\Phi(I) = I$. Viceversa vale il teorema [19]

Teorema 3.2.1 *Se $\Phi \in CP(\mathcal{H}_1)_\sigma$, $\Phi(I) = I$, allora esistono $\mathcal{H}_2$, un operatore unitario U in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$, t.c.*

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_2[\,\rho U^\dagger (X \otimes I) U\,] .$$

Un importante teorema riguardo le $\Phi \in CP(\mathcal{H})_\sigma$ è il seguente [19, 20]:

Teorema 3.2.2 $\Phi \in CP(\mathcal{H})_\sigma \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(X) = \sum_i V_i^\dagger X V_i$
dove V_i , $\sum_i V_i^\dagger V_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

Chiaramente, se $\Phi(I) = I$, si ha $\sum V_i^\dagger V_i = I$. Questo teorema fornisce un'utile informazione sulla forma che assume una mappa CP.

È di immediata verifica che una Φ siffatta conserva la positività di $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, infatti:

$$\begin{aligned} \langle\psi|\Phi^\vee(\rho)|\psi\rangle &= \mathrm{Tr}[\,\Phi^\vee(\rho)|\psi\rangle\langle\psi|\,] = \mathrm{Tr}\left[\rho \sum_i V_i^\dagger|\psi\rangle\langle\psi|V_i\right] = \\ &= \mathrm{Tr}\left[\rho \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\right] = \sum_i \langle\phi_i|\rho|\phi_i\rangle \geq 0 \,, \end{aligned}$$

dove $\Phi^\vee$ è la mappa duale di Φ e $|\phi_i\rangle = V_i^\dagger|\psi\rangle$.

3.3 Mappe completamente dissipative e forma di Lindblad

In questo paragrafo si tratteranno le mappe completamente dissipative. Si comincerà quindi col darne la definizione.

Sia $\mathcal{A}$ una C*-algebra; $M_n(\mathcal{A})$ è l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ ad elementi in $\mathcal{A}$.

Definizione 3.3.1 *Una mappa lineare* $L : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$*, limitata, è detta completamente dissipativa (CD) se soddisfa le condizioni:*

1. $L(I) = 0$
2. $L(X^\dagger) = L(X)^\dagger \qquad \forall X \in \mathcal{A}$
3. $D(L_n; X, X) \geq 0 \qquad \forall X \in M_n(\mathcal{A}),\ \forall n \in N$

dove $D(O; X, Y) = O(X^\dagger Y) - O(X^\dagger)Y - X^\dagger O(Y)$ *ed* $L_n = L \otimes I_n$.

Si scrive allora $L \in CD(\mathcal{A})$, e per $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ semplicemente $L \in CD(\mathcal{H})$. L'insieme delle mappe ultradebolmente continue in $CD(\mathcal{A})$ è indicato con $CD(\mathcal{A})_\sigma$

Le mappe CD sono di particolare importanza per via del seguente teorema:

Teorema 3.3.1 *Sia L una mappa limitata da $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e si supponga che sia $\Lambda_t = \exp(Lt)$. Allora $\Lambda_t \in CP(\mathcal{H})$, $\Lambda_t(I) = I$ se e solo se $L \in CD(\mathcal{A})$*

Ne consegue:

Corollario 3.3.1 *Λ_t è un semigruppo dinamico continuo in norma se e solo se $\Lambda_t = \exp(Lt)$, con $L \in CD(\mathcal{H})_\sigma$*

Per la dimostrazione si rimanda a [19]

Ora, quello che interessa qui è il caso $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Con questa ipotesi vale un teorema dimostrato anch'esso in [19], che in realtà varrebbe con ipotesi più generali ma delle quali non è necessario occuparsi in questa sede:

Teorema 3.3.2 *Se $L \in CD(\mathcal{A})_\sigma$ allora esistono $\Psi \in CP(\mathcal{A})_\sigma$ ed $H \in \mathcal{A}$ autoaggiunto t.c.*

$$L(X) = \Psi(X) - \frac{1}{2}\{\Psi(I), X\} + \mathrm{i}[H, X] \ , \tag{3.2}$$

dove $\{A, B\} = AB + BA$

Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra, e quindi anche nel caso $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H})$, vale anche la proposizione inversa, sempre dimostrata in [19]:

Teorema 3.3.3 *Se $\Psi \in CP(\mathcal{A})$ e $H \in \mathcal{A}$ autoaggiunto, allora*

$$L(X) = \Psi(X) - \frac{1}{2}\{\Psi(I), X\} + \mathrm{i}[H, X]$$

è una mappa $CD(\mathcal{A})$

Di conseguenza, è evidente il seguente risultato:

Teorema 3.3.4 *$L \in CD(\mathcal{H})_\sigma$ se e solo se L è della forma:*

$$L(X) = \sum_i \Big(V_i^\dagger X V_i - \frac{1}{2}\{V_i^\dagger V_i, X\}\Big) + \mathrm{i}[H, X]\ , \qquad (3.3)$$

con V_i, $\sum_i V_i^\dagger V_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoaggiunto.

Il generatore duale nello spazio degli operatori di classe traccia (o nello spazio degli stati) è quindi:

$$L^\vee(\rho) = \sum_i \Big(V_i \rho V_i^\dagger - \frac{1}{2}\{\rho, V_i^\dagger V_i\}\Big) - \mathrm{i}[H, \rho]\ .$$

Questa forma per L sarà indicata come *forma di Lindblad*.

L'equazione dinamica cui soddisfa un semigruppo generato da L è detta *master equation* ed ha chiaramente la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = L^\vee(\rho)\ .$$

È di immediata verifica che, se il semigruppo dinamico di un sistema è generato da una tale mappa L, la traccia di una generica ρ è conservata:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Tr}[\,\rho\,] &= \mathrm{Tr}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\rho\Big] = \mathrm{Tr}[\,L(\rho)\,] = \\
&= \mathrm{Tr}\Big[\sum_i \Big(V_i \rho V_i^\dagger - \frac{1}{2}\{V_i^\dagger V_i, \rho\}\Big) - \mathrm{i}[H, \rho]\Big] = \\
&= \mathrm{Tr}\Big[\sum_i \Big(\rho V_i^\dagger V_i - \rho V_i^\dagger V_i - \mathrm{i}H\rho + \mathrm{i}\rho H\Big)\Big] = 0\ ,
\end{aligned}$$

dove si è usata l'invarianza della traccia per permutazione ciclica degli operatori.

3.4 Semigruppi dinamici covarianti

Si è accennato in precedenza che la condizione 2 di continuità in norma, pur essendo severamente restrittiva, porta ad un risultato che, a meno del rilassamento della condizione $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ed autoaggiunto, non esclude nessuna master equation isotropa nella fase. Per chiarire questo punto è necessario innanzi tutto spiegare più a fondo cosa si intenda per *mappa isotropa in fase*.

Sia dato lo stato ρ_0 per un sistema S, con il generatore infinitesimo F dello spostamento in fase per tale sistema.

$$\rho_\phi = V_\phi \rho_0 V_\phi^\dagger = \mathrm{e}^{\mathrm{i}F\phi} \rho_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}F\phi} \ .$$

Si intende che la dinamica del sistema sia isotropa in fase se essa agisce "allo stesso modo" su ρ_0 e ρ_ϕ.

In termini matematici, ciò significa che, se Φ_t è la mappa che realizza la dinamica tra t_0 e t, allora:

$$\Phi_t(\rho_\phi) = \Phi_t(V_\phi \rho_0 V_\phi^\dagger) = V_\phi \Phi_t(\rho_0) V_\phi^\dagger \ . \tag{3.4}$$

Questa è la condizione di covarianza per il semigruppo dinamico Φ_t.

Come è dimostrato in [22], nel caso di semigruppi dinamici covarianti rispetto ad un gruppo compatto, quale è il gruppo di spostamento in fase, la forma del generatore infinitesimo è sempre del tipo di Lindblad:

$$L(X) = \Psi(X) - K^\dagger X - XK \ , \tag{3.5}$$

e Ψ ed i restanti termini di L sono separatamente covarianti.

Non è detto in genere che gli operatori della rappresentazione di L siano limitati, a differenza di quanto si verifica per semigruppi continui in norma.

3.5 Un tentativo di realizzare lo squeezing isotropo in fase

Prima di concludere questo capitolo, si analizzerà una mappa CP che potrebbe sembrare adatta alla realizzazione dello squeezing isotropo nel caso ottico.

È noto che in tale ambito lo squeezing in quadratura è realizzabile ed è stato effettuato anche a livello sperimentale. Si può allora supporre di effettuare una misura di fase e quindi uno squeezing nella quadratura corrispondente alla fase rilevata.

Ricordiamo che una quadratura del campo elettromagnetico è l'osservabile:

$$a_\phi = \frac{1}{2}(a^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) \ .$$

L'hamiltoniana che realizza lo squeezing è

$$H = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}(\bar{z}a^2 - z{a^\dagger}^2) \ ,$$

dove la fase di z è 2ϕ, mentre il suo modulo ed il tempo di interazione τ determinano il fattore di squeezing. Per realizzare in laboratorio tale dinamica si usa un modo detto *di pompa* accoppiato al sistema con l'hamiltoniana:

$$H_{int} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}(b^\dagger a^2 - b{a^\dagger}^2) \ .$$

dove gli operatori b e $b^\dagger$ sono distruttore e creatore relativi ad un modo con frequenza doppia rispetto a quella del modo da squeezare, e tale modo è preparato nello stato coerente $|z\rangle\langle z|$.

Ponendo $\tau = 1$, l'operatore di squeezing è $U_{sq}(\phi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H}$

Si supponga che la riduzione dopo la misura di fase sia data dallo strumento[4]:

$$I(\phi)\rho = |\psi(\phi)\rangle\langle \mathrm{e}(\phi)|\rho|\mathrm{e}(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)| \ ,$$

e cioè è una misura di Gordon-Louisell.

$I(\phi)\rho$ soddisfa effettivamente le condizioni per essere uno strumento[5]:

$$\mathrm{Tr}\left[\int_\Delta \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\, |\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)| \mathrm{Tr}[\,\rho E(\phi)\,] \right] =$$

[4]Uno strumento è un insieme di mappe $I(x)$ sull'insieme $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ degli operatori di classe traccia su $\mathcal{H}$, dove $x \in \Sigma$, con le proprietà:

$$0 \le \mathrm{Tr}[\,I(\Delta)\rho\,] \le 1 \qquad \mathrm{Tr}[\,I(\Sigma)\rho\,] = 1$$
$$\mathrm{Tr}\left[I\Big(\bigcup_n \Delta_n\Big)\rho \right] = \sum_n \mathrm{Tr}[\,I(\Delta_n)\rho\,] \ ,$$

dove $\mathrm{Tr}[\,\rho\,] = 1$ e $\{\Delta_n\}$ è un sottoinsieme numerabile di elementi disgiunti di $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

[5]$E(\phi) = |\mathrm{e}(\phi)\rangle\langle \mathrm{e}(\phi)|$

$$= \int_\Delta \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} \,\mathrm{Tr}[\,\rho E(\phi)\,] = \mathrm{Tr}[\,\rho M(\Delta)\,] \le 1 \;,$$

e chiaramente, se fosse $\Delta = [0, 2\pi)$, l'integrale sarebbe uguale ad 1. Facilmente si verifica la proprietà di additività, per le proprietà degli integrali.

Ora si supponga che ρ sia puro in fase. Allora:

$$I(\phi)\rho = |\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)|\mathrm{Tr}[\,\rho E(\phi)\,] \;,$$

e normalizzando:

$$\rho' = \frac{I(\phi)\rho}{\mathrm{Tr}[\,I(\phi)\rho\,]} = |\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)| \;.$$

Se $|\psi(\phi)\rangle$ è squeezato nella quadratura ϕ si ha effettivamente una restrizione della distribuzione di probabilità della fase.

Si supponga inoltre che $U_{\phi^*}|\psi(\phi)\rangle = |\psi(\phi + \phi^*)\rangle$, ad esempio $|\psi(\phi)\rangle$ sia il vuoto squeezato nella quadratura 0 e poi ruotato con U_ϕ:

$$|\psi(\phi)\rangle = U_\phi U_{sq}|0\rangle \;.$$

Tale mappa non è covariante, e ciò è di immediata verifica:

$$\begin{aligned} I(\phi)U_{\phi^*}\rho U^\dagger_{\phi^*} &= |\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)|\mathrm{Tr}[\,\rho E(\phi - \phi^*)\,] = \\ &= |\psi(\chi + \phi^*)\rangle\langle\psi(\chi + \phi^*)|\mathrm{Tr}[\,\rho E(\chi)\,] \;, \end{aligned}$$

dove $\chi = \phi - \phi^*$, e normalizzando

$$\rho' = U_{\phi^*}|\psi(\chi)\rangle\langle\psi(\chi)|U^\dagger_{\phi^*} = |\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)| \;,$$

che evidentemente non è uguale a

$$U_{\phi^*}|\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)|U^\dagger_{\phi^*} \;.$$

Per avere una mappa covariante è necessario che la misura sia non selettiva. Allora la riduzione è data da:

$$\rho' = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} \,\mathrm{Tr}[\,\rho E(\phi)\,]|\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)| \;.$$

Effettivamente questa mappa è covariante:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\,\mathrm{Tr}[\,U_{\phi^*}\rho U^\dagger_{\phi^*}E(\phi)\,]|\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)| = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\,\mathrm{Tr}[\,\rho E(\phi-\phi^*)\,]|\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)| = \\
&= \int_{-\phi^*}^{2\pi-\phi^*} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\,\mathrm{Tr}[\,\rho E(\phi)\,]|\psi(\phi+\phi^*)\rangle\langle\psi(\phi+\phi^*)| = \\
&= U_{\phi^*}\Big\{\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\,\mathrm{Tr}[\,\rho E(\phi)\,]|\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)|\Big\}U^\dagger_{\phi^*}\ .
\end{aligned}
$$

L'indeterminazione in fase sarà definita nel prossimo paragrafo, ma si può supporre che sia il valore d'aspettazione di una funzione pari e crescente di $\phi-\phi^*$, $L(\phi-\phi^*)$.

Ora, se si calcola la larghezza della distribuzione di probabilità della fase per ρ', si ha:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi'}{2\pi}\,\mathrm{Tr}[\,\rho'_{\phi^*}\Pi(\phi')\,]L(\phi'-\phi^*) = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi'}{2\pi}L(\phi'-\phi^*)\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\,\mathrm{Tr}[\,\rho_{\phi^*}E(\phi)\,]\mathrm{Tr}[\,|\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)|\Pi(\phi')\,]\ ,
\end{aligned}
$$

dove $\Pi(\phi)\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}$ è la POM ottima per ρ'_0.

È allora evidente che all'indeterminazione in fase di $|\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)|$ si aggiunge quella della misura effettuata su ρ'.

È abbastanza intuitivo comprendere, perciò, che per quanto squeezato sia lo stato $|\psi(\phi)\rangle\langle\psi(\phi)|$, ρ' avrà comunque una distribuzione in fase più larga di ρ.

3.6 Conclusione

In questo capitolo si è presentata la forma più generale di master equation per semigruppi continui in norma. Si è visto poi che tale forma vale anche per master equation covarianti rispetto a gruppi compatti. Ne consegue che una master equation di squeezing isotropo in fase sia della forma di

Lindblad. Questo è il punto di partenza per la ricerca di tale master equation.

È da osservare che la ricerca sulla forma e le proprietà dei semigruppi dinamici è abbastanza recente e per via delle difficoltà matematiche nell'operare con algebre operatoriali e con semigruppi non ha ancora oggi portato ad una equazione dinamica scritta in forma compatta ed utile per tutti i casi. Tutti i teoremi visti in questo capitolo valgono infatti sotto precise ipotesi, che sono soddisfatte dai sistemi di cui ci si occupa in questo lavoro, ma non hanno certo una validità generale.

Tuttavia spesso in letteratura si ritiene che la forma di Lindblad per la master equation, sebbene dimostrata originariamente [19] nel caso dei semigruppi continui in norma, ed in seguito da altri autori ampliata ad altri casi particolari [23, 24], sia la forma più generale di master equation, poiché tutti i casi fisici trattati in dettaglio con un'interazione sistema-bagno, portano ad equazioni di questo tipo.

Un'ampia bibliografia sul lavoro svolto negli ultimi anni su tale argomento, e sulla casistica dei semigruppi affrontati dai vari autori si può trovare in [21].

Capitolo 4

Squeezing isotropo in fase e la freccia del tempo

In questo capitolo, dopo aver scritto in modo utile per i calcoli la master equation covariante per il gruppo di spostamento di fase, si procede a definire l'indeterminazione in fase, e quindi a dimostrare che in un processo isotropo una sua eventuale diminuzione sarebbe realizzabile soltanto invertendo la freccia del tempo. Si utilizzeranno diverse condizioni, ed il calcolo varrà solo per l'istante iniziale, tuttavia si mostrerà nell'ultimo paragrafo quanto generalizzabili siano i risultati ottenuti.

4.1 Gli operatori e_+ ed e_-

Questo paragrafo di carattere piuttosto tecnico è una necessaria introduzione a quanto si esporrà nel seguito. Gli operatori e_+ ed e_-, che saranno definiti nei prossimi sottoparagrafi, sono infatti molto utili per sviluppare i calcoli, e conviene esporne subito definizione e proprietà fondamentali. Si supporrà, salvo specifiche indicazioni, che lo spettro di F sia non degenere.

4.1.1 Gli operatori e_+ ed e_- nel caso $S = \mathbb{N}$

Sia $\{|n\rangle\}$ una base di autostati di F, dove per ora lo spettro di F è $S = \mathbb{N}$.

Definizione 4.1.1 *Si definisce* e_+ *l'operatore che agisce sulla base* $\{|n\rangle\}$ *nel modo seguente:*

$$e_+|n\rangle = |n+1\rangle \ .$$

Pertanto:

$$(e_+)_{m,n} \doteq \langle m|e_+|n\rangle = \langle m|n+1\rangle = \delta_{m,n+1} \ ,$$

e quindi

$$e_+ = \sum_{m,n=0}^{\infty} (e_+)_{m,n}|m\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n| \ . \tag{4.1}$$

Osservazione. e_+ *è densamente definito poiché* $|n\rangle \in \mathcal{D}(e_+) \quad \forall n \in S$. *Pertanto* e_+ *ammette aggiunto.*

Definizione 4.1.2 *Si definisce* e_- *l'operatore che agisce sulla base* $\{|n\rangle\}$ *nel modo seguente:*

$$\begin{aligned} e_-|n\rangle &= |n-1\rangle \qquad n \geq 1 \\ e_-|0\rangle &= 0 \ . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Una prima immediata osservazione è che gli stati della rappresentazione di Susskind-Glogower, definiti nel capitolo 2 dalla (2.23) sono autovettori[1] di e_-:

$$e_-|\mathrm{e}(\phi)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{in\phi}|n-1\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|\mathrm{e}(\phi)\rangle \ .$$

Procedendo come per e_+ si ha:

$$(e_-)_{m,n} \doteq \langle m|e_-|n\rangle = \langle m|n-1\rangle = \delta_{m,n-1} \ ,$$

[1]Non sono invece autostati di e_+, come si potrebbe pensare. Infatti e_+, agendo su $|\mathrm{e}(\phi)\rangle$, dà una serie in cui manca il termine in $|0\rangle$ e che pertanto non può essere multipla di $|\mathrm{e}(\phi)\rangle$.

e quindi

$$e_- = \sum_{m,n=0}^{\infty} (e_-)_{m,n} |m\rangle\langle n| = \sum_{n=1}^{\infty} |n-1\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1| \ . \tag{4.3}$$

Volendo ora calcolare $e_+^\dagger$, si trova:

$$(e_+^\dagger)_{m,n} \doteq \langle m|e_+^\dagger|n\rangle = \langle m+1|n\rangle = \delta_{m+1,n} \ ,$$

che porta a:

$$e_+^\dagger = \sum_{m,n=0}^{\infty} (e_+^\dagger)_{m,n} |m\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n| = e_- \ , \tag{4.4}$$

ed analogamente si ottiene

$$e_-^\dagger = e_+ \ . \tag{4.5}$$

Si calcoleranno ora due importanti operatori:

$$\begin{aligned} e_-e_+ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} |m\rangle\langle m+1|n+1\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbb{I} \qquad (4.6)\\ e_+e_- &= \sum_{m,n=0}^{\infty} |m+1\rangle\langle m|n\rangle\langle n+1| = \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \\ &= \mathbb{I} - |0\rangle\langle 0| \ . \qquad (4.7) \end{aligned}$$

Ora si mostrerà che le potenze di e_+ ed e_-, e_+^n ed e_-^n, agiscono sugli stati $|k\rangle$ nel modo seguente:

$$e_+^n|k\rangle = |n+k\rangle \ , \tag{4.8}$$

mentre per e_-:

$$\begin{aligned} e_-^n|k\rangle = |k-n\rangle \qquad & k \geq n \\ e_-^n|k\rangle = 0 \qquad & k < n \ . \end{aligned} \tag{4.9}$$

La dimostrazione procede per induzione: se

$$e_+^n|k\rangle = |k+n\rangle \ ,$$

allora

$$e_+^{(n+1)}|k\rangle = e_+|k+n\rangle = |k+n+1\rangle \; .$$

Analogamente, se

$$e_-^n|k\rangle = |k-n\rangle \; ,$$

allora

$$e_-^{(n+1)}|k\rangle = e_-|k-n\rangle = |k-n-1\rangle \; .$$

Altre proprietà importanti dell'operatore e_+ sono le seguenti, facilmente ricavabili da quanto in precedenza mostrato:

$$\begin{aligned} e_+e_-^n &= (\mathbb{I} - |0\rangle\langle 0|)e_-^{(n-1)} && (4.10)\\ e_+^n e_- &= e_+^{(n-1)}(\mathbb{I} - |0\rangle\langle 0|) && (4.11)\\ e_- e_+^n &= e_+^{(n-1)} && (4.12)\\ e_-^n e_+ &= e_-^{(n-1)} \; . && (4.13) \end{aligned}$$

Infine si dimostrerà che:

$$e_+^n e_-^n = \mathbb{I} - \sum_{l=0}^{n-1} |l\rangle\langle l| \; . \tag{4.14}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} e_+^m e_-^m &= e_+^{(m-1)}(\mathbb{I} - |0\rangle\langle 0|)e_-^{(m-1)} = \\ &= e_+^{(m-1)}e_-^{(m-1)} - |m-1\rangle\langle m-1| \; . \end{aligned}$$

Perciò, se la (4.14) vale per $n = m-1$, vale anche per $n = m$:

$$e_+^m e_-^m = \mathbb{I} - \sum_{l=0}^{m-2} |l\rangle\langle l| - |m-1\rangle\langle m-1| = \mathbb{I} - \sum_{l=0}^{m-1} |l\rangle\langle l| \; ,$$

mentre è chiaro dalla (4.7) che la (4.14) vale per $n = 1$.

È immediato dedurre dalla (4.6) che invece:

$$e_-^n e_+^n = \mathbb{I} \; . \tag{4.15}$$

Si generalizzeranno ora le proprietà viste ai casi $S = \mathbb{Z}$ ed $S = \mathbb{Z}_q$.

4.1.2 Gli operatori e_+ ed e_- nel caso $S = \mathbb{Z}$

Questo è dei tre il caso più semplice. La (4.1) diventa:

$$e_+ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n+1\rangle\langle n| \ , \tag{4.16}$$

e la (4.3):

$$e_- = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n\rangle\langle n+1| \ . \tag{4.17}$$

Una prima osservazione è che con $S = \mathbb{Z}$ gli stati della rappresentazione di Susskind-Glogower $|\mathrm{e}(\phi)\rangle$ sono autostati sia di e_- relativi a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, sia di e_+ relativi a $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$. Le (4.4) e (4.5) restano valide:

$$e_+^\dagger = e_- \tag{4.18}$$

$$e_-^\dagger = e_+ \ , \tag{4.19}$$

e così anche la (4.6):

$$e_- e_+ = \mathbb{I} \ . \tag{4.20}$$

La (4.7) diventa invece:

$$e_+ e_- = \mathbb{I} \ . \tag{4.21}$$

Analogamente la (4.8) resta invariata:

$$e_+^n |k\rangle = |k+n\rangle \ , \tag{4.22}$$

mentre la (4.9)diventa:

$$e_-^n |k\rangle = |k-n\rangle \ . \tag{4.23}$$

I quattro operatori analoghi di (4.10), (4.11), (4.12), (4.13) sono:

$$e_+ e_-^n = e_-^{(n-1)} \tag{4.24}$$

$$e_+^n e_- = e_+^{(n-1)} \tag{4.25}$$

$$e_- e_+^n = e_+^{(n-1)} \tag{4.26}$$

$$e_-^n e_+ = e_-^{(n-1)} \ . \tag{4.27}$$

Infine:

$$e_+^n e_-^n = \mathbb{I} \tag{4.28}$$

$$e_-^n e_+^n = \mathbb{I} \ . \tag{4.29}$$

4.1.3 Gli operatori e_+ ed e_- nel caso $S = \mathbb{Z}_{q+1}$

In questo caso, rispetto ad $S = \mathbb{N}$, la definizione di e_- resta uguale, mentre in quella di e_+ si aggiunge la condizione:

$$e_+|n\rangle = 0 \qquad n \geq q \; .$$

La (4.1) e la (4.3) diventano:

$$\begin{aligned} e_+ &= \sum_{n=0}^{q-1} |n+1\rangle\langle n| & (4.30) \\ e_- &= \sum_{n=0}^{q-1} |n\rangle\langle n+1| \; . & (4.31) \end{aligned}$$

La (4.4) e la (4.5) restano invariate.

Se da un lato la (4.7) resta invariata:

$$e_+ e_- = \mathbb{I} - |0\rangle\langle 0| \; , \tag{4.32}$$

dall'altro la (4.6) diventa:

$$e_- e_+ = \sum_{m,n=0}^{q-1} |m\rangle\langle m+1|n+1\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{q-1} |n\rangle\langle n| = \mathbb{I} - |q\rangle\langle q| \; . \tag{4.33}$$

Per quanto riguarda le potenze, la (4.9) non cambia, mentre la (4.8) diventa:

$$\begin{aligned} e_+^n|k\rangle = |k+n\rangle \qquad & k \leq q-n \\ e_+^n|k\rangle = 0 \qquad & k > q-n \; . \end{aligned} \tag{4.34}$$

Per quanto riguarda le restanti proprietà, infine:

$$\begin{aligned} e_+ e_-^n &= (\mathbb{I} - |0\rangle\langle 0|) e_-^{(n-1)} & (4.35) \\ e_+^n e_- &= e_+^{(n-1)} (\mathbb{I} - |0\rangle\langle 0|) & (4.36) \\ e_- e_+^n &= (\mathbb{I} - |q\rangle\langle q|) e_+^{(n-1)} & (4.37) \\ e_-^n e_+ &= e_-^{(n-1)} (\mathbb{I} - |q\rangle\langle q|) & (4.38) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e_+^n e_-^n &= \mathbb{I} - \sum_{k=0}^{n-1} |k\rangle\langle k| && (4.39) \\
e_-^n e_+^n &= \mathbb{I} - \sum_{k=q-n+1}^{q} |k\rangle\langle k| \,. && (4.40)
\end{aligned}
$$

4.1.4 Spettro degenere

Un'ultima osservazione riguarda il caso in cui lo spettro di F sia degenere. In tal caso, se è definito un problema di stima della fase rispetto ad uno stato puro $|\psi\rangle\langle\psi|$, si possono definire gli spazi $\mathcal{H}_\parallel$ e $\mathcal{H}_\perp$, come si è fatto nel paragrafo 2.5. In $\mathcal{H}_\parallel$, allora, si possono definire gli operatori e_+ ed e_- come se non ci fosse degenerazione. Ciò vale anche per uno stato miscela di stati puri nello stesso $\mathcal{H}_\parallel$.

Tuttavia ciò non permette di generalizzare i calcoli che seguono perché non tutti gli operatori si possono scrivere come somma diretta di un operatore in $\mathcal{H}_\parallel$ ed uno in $\mathcal{H}_\perp$.

4.2 La forma di una master equation covariante

Come si è detto nel capitolo precedente, affinché una master equation realizzi un processo isotropo in fase, la sua forma dev'essere covariante rispetto al gruppo di spostamento di fase, e cioè rispetto alla rappresentazione $U_\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}F\phi}$, dove F è il generatore del gruppo.

Sia ora $\Gamma_t(\rho)$ la generica mappa CP del semigruppo dinamico corrispondente; la condizione di covarianza si scrive:

$$
\Gamma_t(U_\phi \rho U_\phi^\dagger) = U_\phi \Gamma_t(\rho) U_\phi^\dagger \,. \tag{4.41}
$$

Come si sa dal paragrafo 3.4 un tale semigruppo dinamico ha un generatore infinitesimo della forma:

$$
\Psi(\rho) - K\rho - \rho K^\dagger \,,
$$

dove la mappa CP Ψ e K sono separatamente covarianti.

Ora, dalla (3.2.2), sappiamo che:

$$\Psi(\rho) = \sum V_i \rho V_i^\dagger \qquad V_i, \sum V_i^\dagger V_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ . \tag{4.42}$$

Questa, come si vedrà, impone una forma precisa agli operatori V_i. Sia $\{|n\rangle\}$ una base di autostati di F; in tale rappresentazione un generico operatore O si scrive:

$$O = \sum_{m,n \in S} O_{m,n} |m\rangle\langle n| = \sum_{m \in S} \sum_{i \in P_m} O_{m,m-i} |m\rangle\langle m-i| \ ,$$

dove $P_m = \{i \in \mathbb{Z} |\ m - i \in S\}$.

Ponendo ora $O_{m,m-i} = 0$ per $i \notin P_m$:

$$O = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in S} O_{m,m-i} |m\rangle\langle m-i| \ .$$

Poiché $O_{m,m-i}$ dipende da m e da i, si può porre:

$$O_{m,m-i} = f^{(i)}(m) \ ,$$

e quindi:

$$\begin{aligned} O &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in S} f^{(i)}(m) |m\rangle\langle m-i| = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in S} f^{(i)}(m) |m\rangle\langle m| \sum_{n \in S} |n+i\rangle\langle n| \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} f^{(i)}(F) e_+^i \ , \end{aligned}$$

dove chiaramente si è posto $e_+^{-i} = e_-^i$ per $i > 0$

Ora, anche gli operatori V_j possono essere scritti in questa rappresentazione, perciò:

$$V_j = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_j^{(i)}(F) e_+^i \ .$$

Perciò:

$$\Psi(\rho) = \sum_j \sum_{l,m \in \mathbb{Z}} f_j^{(l)}(F) e_+^l \rho e_-^m f_j^{(m)\dagger} \ .$$

Si cercherà ora, a partire da questa rappresentazione, una condizione di covarianza per la mappa Ψ.

$$\Psi(U_\phi \rho U_\phi^\dagger) = \sum_j \sum_{l,m\in\mathbb{Z}} f_j^{(l)}(F) e_+^l U_\phi \rho U_\phi^\dagger e_-^m {f_j^{(m)}}^\dagger(F) \; . \tag{4.43}$$

A questo punto è utile introdurre una proprietà degli operatori e_+ ed e_-:

$$\begin{aligned} e_+^l F &= \sum_{n\in P} |n+l\rangle\langle n| F = \sum_{n\in P} n|n+l\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n\in P} [(n+l)-l]|n+l\rangle\langle n| = \sum_{n\in P} (F-l)|n+l\rangle\langle n| = \\ &= (F-l)e_+^l \; , \end{aligned} \tag{4.44}$$

dove $P = \{n \in \mathbb{Z}|\; n, n+l \in S\}$

È chiaro dalla (4.44) che:

$$F e_+^l = e_+^l (F+l) \; . \tag{4.45}$$

Facendo l'aggiunto delle (4.44) e (4.45) si ottengono le:

$$F e_-^l = e_-^l (F-l) \tag{4.46}$$

$$e_-^l F = (F+l) e_-^l \; , \tag{4.47}$$

e più in generale:

$$e_+^l f(F) = f(F-l) e_+^l \tag{4.48}$$

$$e_-^l f(F) = f(F+l) e_-^l \; . \tag{4.49}$$

Usando le proprietà (4.48) e (4.49), tenendo conto che $U_\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}F\phi}$, la (4.43) diventa:

$$\begin{aligned} \Psi(U_\phi \rho U_\phi^\dagger) &= \sum_j \sum_{l,m\in\mathbb{Z}} f_j^{(l)}(F) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(F-l)\phi} e_+^l \rho e_-^m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(F-m)\phi} {f_j^{(m)}}^\dagger(F) = \\ &= U_\phi \Bigg(\sum_j \sum_{l,m\in\mathbb{Z}} f_j^{(l)}(F) e_+^l \rho e_-^m {f_j^{(m)}}^\dagger(F) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\phi} \Bigg) U_\phi^\dagger \; . \end{aligned}$$

Perché Ψ sia covariante, la fase $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\phi}$ dev'essere 1, ma $\phi \in [0, 2\pi)$, pertanto l'unica possibilità è che sia $l = m$.

Questo è possibile solo se $f_j^{(m)}(F) = \delta_{l,m} f_j(F)$,cioé:

$$V_j = f_j(F) e_+^l \; .$$

Si può allora porre:

$$V_j = V_n = f_j(F) e_+^n = f_{n(j)}(F) e_+^n \; ,$$

e se l è lo stesso per diversi valori di j, ad esempio j' e j'', si può porre:

$$V_n = V_{j'} + V_{j''} = [f_{j'}(F) + f_{j''}(F)] e_+^n = f_n(F) e_+^n \; ,$$

e l'espressione di Ψ diventa:

$$\Psi(\rho) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(F) e_+^n \rho e_-^n f_n^\dagger(F) \; . \tag{4.50}$$

Ora, ponendo:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} V_i^\dagger V_i + \mathrm{i} H$$

nella (3.5) si ottiene la forma:

$$L(\rho) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ V_i \rho V_i^\dagger - \frac{1}{2} \{ V_i^\dagger V_i, \rho \} - \mathrm{i} H \rho + \mathrm{i} \rho H^\dagger \right\} \; ,$$

dove però ora H non è necessariamente limitato. Si può dimostrare tuttavia che H è autoaggiunto[2] e si definirà H hamiltoniana del sistema[3].

Si sa da [22] che la parte $K\rho + \rho K^\dagger$ dev'essere separatamente covariante. Ora si mostrerà che è sufficiente, a questo scopo, la covarianza di $\mathrm{i}[\, H, \rho \,]$.

Infatti:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} V_i^\dagger V_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} e_-^i f_i^\dagger(F) f_i(F) e_+^i \; ,$$

[2]Infatti, perché sia $\mathrm{Tr}[\, L'(\rho) \,] = 0$, dev'essere $\mathrm{Tr}[\, H\rho \,] = \mathrm{Tr}[\, H^\dagger \rho \,]$ per qualunque ρ, e quindi $H = H^\dagger$.

[3]Questa definizione è giustificata, poiché per tutti i sistemi per i quali si può ottenere la master equation dall'interazione con un bagno facendo una traccia parziale, essa è di questa forma con H hamiltoniana libera del sistema

da cui:

$$
\begin{aligned}
U_\phi\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} V_i^\dagger V_i\right)U_\phi^\dagger &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} e_-^i \mathrm{e}^{\mathrm{i}(F-i)} f_i^\dagger(F) f_i(F) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(F-i)} e_+^i = \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} e_-^i f_i^\dagger(F) U_\phi U_\phi^\dagger f_i(F) e_+^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} V_i^\dagger V_i \; .
\end{aligned}
$$

Pertanto basta che sia $[\,H, F\,] = 0$, come del resto deve essere per la definizione di fase (U_ϕ dev'essere un gruppo di simmetria per il sistema libero).

Quindi, in definitiva, la master equation sarà:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\rho = L(\rho) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}(V_i)\rho - \mathrm{i}[\,H, \rho\,] \; ,
$$

dove $\mathcal{L}(O)\rho = O\rho O^\dagger - \frac{1}{2}\{O^\dagger O, \rho\}$.

4.3 Indeterminazione in fase e sua evoluzione per stati puri in fase

D'ora in poi, salvo diversa indicazione, si considererà ρ_0 puro in fase, cioè, come definito in (2.5.1):

$$
\rho_{0_{mn}} = \psi_{mn} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi_m - \chi_n)} \qquad \psi_{mn} \geq 0 \; .
$$

Questa restrizione, per quanto possa apparire drastica, è giustificata dal fatto che per questi soli stati, ad oggi, si conosce la POM ottima, perciò, in effetti, sono i soli stati di cui, almeno in teoria, si sa misurare la fase.

Per prima cosa, a questo punto, è necessario definire l'indeterminazione in fase.

Per un'osservabile associata ad un operatore lineare autoaggiunto M, l'indeterminazione è definita da $\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle = \Delta^2(M)$.

Per quanto riguarda la fase, un primo problema è rappresentato dall'assenza di un operatore autoaggiunto ad essa associato.

Si potrebbe tuttavia pensare, conoscendo la POM ottima $M_\phi(\mathrm{d}\phi)$ per uno stato generico ρ_0, di valutare:

$$\langle\phi\rangle = \int_0^{2\pi} \phi\,\mathrm{Tr}[\,\rho_{\phi^*} M_\phi(\mathrm{d}\phi)\,]\ .$$

Quindi

$$\langle(\phi - \langle\phi\rangle)^2\rangle = \int_0^{2\pi} (\phi - \langle\phi\rangle)^2 \mathrm{Tr}[\,\rho_{\phi^*} M_\phi(\mathrm{d}\phi)\,]\ .$$

Un secondo problema, tuttavia, si presenta nel calcolo di $\langle\phi\rangle$: l'integrale con cui questo valore è definito dipende dagli estremi di integrazione.

Ora, poiché vorremmo che la POM desse una stima unbiased della ϕ^*, poniamo:

$$\begin{aligned}\langle\phi\rangle &= \int_{\phi^*-\pi}^{\phi^*+\pi} \phi\,\mathrm{Tr}[\,\rho_{\phi^*} M_\phi(\mathrm{d}\phi)\,] = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\phi^* + x)\mathrm{Tr}[\,\rho_0 M_x(\mathrm{d}x)\,]\ .\end{aligned}$$

Si osserva che $\mathrm{Tr}[\,\rho_0 M_\phi(\mathrm{d}\phi)\,]$ è una funzione pari di ϕ, infatti, a meno del differenziale $\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}$, tale traccia è:

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n\in S} \rho_{0nm}\xi_{mn} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\phi} = \\ &= 1 + \sum_{n>m} \rho_{0nm}\xi_{mn} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\phi}) = \\ &= 1 + 2\sum_{n>m} \rho_{0nm}\xi_{mn} \cos\{(n-m)\phi\}\ . \qquad (4.51)\end{aligned}$$

Perciò si ha che:

$$\begin{aligned}\langle\phi\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} (\phi^* + x)\mathrm{Tr}[\,\rho_0 M_x(\mathrm{d}x)\,] = \\ &= \phi^* \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Tr}[\,\rho_0 M_x(\mathrm{d}x)\,] + \int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{Tr}[\,\rho_0 M_x(\mathrm{d}x)\,] = \\ &= \phi^* + \int_0^{\pi} x\,\mathrm{Tr}[\,\rho_0 M_x(\mathrm{d}x)\,] + \int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{Tr}[\,\rho_0 M_x(\mathrm{d}x)\,] = \\ &= \phi^* + \int_0^{\pi} x\,\mathrm{Tr}[\,\rho_0 M_x(\mathrm{d}x)\,] - \int_0^{\pi} x\,\mathrm{Tr}[\,\rho_0 M_x(\mathrm{d}x)\,] = \phi^*\ .\end{aligned}$$

È pertanto sensato calcolare l'indeterminazione in fase come "dispersione" dei risultati possibili della misura intorno al valore ϕ^*.

Il terzo problema, che si presenta a questo punto, è che, definendo, mediante la consueta varianza:

$$\Delta^2(\phi) = \langle(\phi - \phi^*)^2\rangle = \int_0^{2\pi} (\phi - \phi^*)^2 \mathrm{Tr}[\,\rho_{\phi^*} M(\mathrm{d}\phi)\,]\ ,$$

si ha ancora una scomoda dipendenza dagli estremi di integrazione.

Una soluzione è definire l'indeterminazione in fase come valor medio su $[0, 2\pi)$ di una funzione periodica, pari nell'argomento $\phi - \phi^*$, che pesi la distanza di ϕ da ϕ^*:

$$\begin{aligned} D &= \langle C\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{Tr}[\,\rho_{\phi^*} M_\phi(\mathrm{d}\phi)\,] C(\phi - \phi^*) = \\ &= \mathrm{Tr}\left[\rho_0 \int_0^{2\pi} M_{\phi-\phi^*}(\mathrm{d}\phi) C(\phi - \phi^*)\right] = \mathrm{Tr}[\,\rho_0 \hat{C}\,] = \langle\hat{C}\rangle\ , \end{aligned} \tag{4.52}$$

dove[4] $\hat{C} = \int_0^{2\pi} M_\phi(\mathrm{d}\phi) C(\phi)$.

Non è troppo restrittivo considerare $C(\phi)$ nella classe di funzioni costo di Holevo[5]:

$$C(\phi) = c_0 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l(\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\phi}) \qquad c_l \geq 0 \quad \forall l \geq 1\ .$$

Poiché $M(\mathrm{d}\phi)$ è covariante, $M(\mathrm{d}\phi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} U_\phi \xi_0 U_\phi^\dagger$, quindi, sviluppando nella rappresentazione $\{|n\rangle\}$:

$$M(\mathrm{d}\phi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} \sum_{m,n\in S} \xi_{0mn} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\phi} |m\rangle\langle n|\ .$$

---

[4]Si veda la (2.16) per la dimostrazione che $\hat{C}$ non dipende dall'intervallo di integrazione

[5]Si noti tuttavia che la varianza "periodicizzata", cioè

$$C(\phi) = \min[(\phi - \phi^*)^2, (\phi - \phi^* - 2\pi)^2] \quad \phi \in [0, 2\pi)\ ,$$

non rientra in tale classe.

Usando questa, si ha per l'operatore costo:

$$
\begin{aligned}
\hat{C} &= \sum_{m,n\in S} \xi_{0mn} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\phi} \left[c_0 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l (\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\phi}) \right] = \\
&= c_0 \mathbb{I} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{|m-n|=l} \xi_{0mn} |m\rangle\langle n| = \\
&= c_0 \mathbb{I} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{m\in P_l} \Big(\xi_{0m+l,m} |m+l\rangle\langle m| + \xi_{0m,m+l} |m\rangle\langle m+l| \Big) ,
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

dove $P_l = \{m \in S |\ m+l \in S\}$

Poiché si limiterà l'attenzione al caso ρ_0 puro in fase, la POM ottima ha

$$|\xi_{0mn}| = 1 \quad \forall m,n \in S \ .$$

Inoltre, con un opportuno cambio di base, la ρ_0 ha tutti elementi reali positivi. Infatti:

$$\rho_{0mn} = \psi_{mn} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi_m - \chi_n)} \qquad \psi_{mn} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \quad \chi_m \in [0, 2\pi) \ ,$$

ma, se si sostituisce:

$$|m\rangle \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi_m} |m\rangle \ ,$$

l'elemento ρ_{mn} diventa:

$$\rho_0 = \psi_{mn} \ .$$

Pertanto si ha $\xi_{0mn} = 1 \quad \forall m,n \in S$, e quindi:

$$\hat{C} = c_0 \mathbb{I} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l (e_+^l + e_-^l) \ . \tag{4.54}$$

A questo punto ci si chiede come evolva $\langle \hat{C} \rangle$ sotto l'azione di una master equation covariante in fase.

Dapprima si limiterà l'attenzione alla parte cosiddetta "dissipativa" della master equation, trascurando la parte hamiltoniana $-\mathrm{i}[\,H, \rho\,]$. Si vedrà in seguito che questa non è un'arbitrarietà ma ha una giustificazione precisa. Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \doteq L'(\rho) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(V_i \rho V_i^\dagger - \frac{1}{2}\{V_i^\dagger V_i, \rho\} \right) . \tag{4.55}$$

Ne consegue:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \hat{C} \rangle = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Tr}[\, \rho \hat{C}\,] = \mathrm{Tr}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t}\rho\Big)\hat{C} \Big] + \mathrm{Tr}\Big[\rho\Big(\frac{\partial}{\partial t}\hat{C}\Big) \Big] . \tag{4.56}$$

Si è derivato anche $\hat{C}$ perché, come si vede dalla (4.53), nella sua espressione compare la POM ottima, e non necessariamente essa resta uguale con l'evoluzione di ρ.

Si supporrà nel seguito che ρ rimanga pura in fase, riservando al paragrafo 4.6 una discussione sui limiti di validità del calcolo.

Se la ρ resta pura in fase, il secondo contributo è nullo. Infatti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\hat{C} = -\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty} c_l \sum_{m\in P_l} \left(\mathrm{i}\dot{\phi}_{m+l,m} |m+l\rangle\langle m| + \mathrm{i}\dot{\phi}_{m,m+l} |m\rangle\langle m+l| \right) ,$$

e quindi, ricordando che $\phi_{mn} = -\phi_{nm}$:

$$\mathrm{Tr}\left[\rho\frac{\partial}{\partial t}\,\hat{C} \right] = -\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty} c_l \sum_{m\in P_l} \mathrm{i}\dot{\phi}_{m+l,m}(\rho_{m+l,m} - \rho_{m,m+l}) ,$$

e poiché ρ_{mn}, nella base opportuna, è reale, $\mathrm{Tr}\left[\rho\frac{\partial}{\partial t}\,\hat{C} \right] = 0$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\,D &= \mathrm{Tr}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t}\rho\Big)\hat{C} \Big] = \mathrm{Tr}[\, L'(\rho)\hat{C}\,] = \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} c_l \Big(\mathrm{Tr}[\, L'(\rho)e_+^l\,] + \mathrm{Tr}[\, L'(\rho)e_-^l\,] \Big) . \end{aligned}$$

Poiché $L'(\rho)^\dagger = L'(\rho^\dagger) = L'(\rho)$ ed $e_-^l = (e_+^l)^\dagger$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\, L'(\rho)e_-^l\,] &= \mathrm{Tr}[\, (e_+^l)^\dagger L'(\rho)\,] = \mathrm{Tr}\Big[(L'(\rho)e_+^l)^\dagger \Big] = \\ &= \Big(\mathrm{Tr}[\, L'(\rho)e_+^l\,] \Big)^* . \end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} D = -\sum_{l=1}^{\infty} c_l \mathrm{Re}\Big(\mathrm{Tr}[\, L'(\rho) e_+^l \,]\Big) \,. \tag{4.57}$$

Si dimostrerà di seguito che il singolo contributo $\mathrm{Re}\Big(\mathrm{Tr}[\, L'(\rho) e_+^l \,]\Big)$ è negativo, e quindi $\frac{\partial}{\partial t} D$ è positivo.

4.3.1 Calcolo per $S = \mathbb{N}$

Si calcolerà ora il valore della traccia $\mathrm{Tr}[\, L'(\rho) e_+^l \,]$ e si mostrerà che ogni singolo contributo è negativo. Si indicheranno con $g_i(F)$ le funzioni $f_i(F)$ con $i \geq 0$ che compaiono nella (4.50) e con $h_{-i}(F)$ quelle con $i < 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\, L'(\rho) e_+^l \,] &= \mathrm{Tr}\Bigg[\sum_{j=0}^{\infty} \Big(V_j \rho V_j^\dagger e_+^l - \frac{1}{2} \{ V_j^\dagger V_j, \rho \} e_+^l \Big) \Bigg] + \\
&+ \mathrm{Tr}\Bigg[\sum_{j=1}^{\infty} \Big(V_{-j} \rho V_{-j}^\dagger e_+^l - \frac{1}{2} \{ V_j^\dagger V_j, \rho \} e_+^l \Big) \Bigg] = \\
= \ & \mathrm{Tr}\Bigg[\sum_{j=0}^{\infty} \Big(g_j(F) e_+^j \rho e_-^j g_j^\dagger(F) e_+^l - \frac{1}{2} \{ (e_-^j g_j^\dagger(F) g_j(F) e_+^j), \rho \} e_+^l \Big) \Bigg] + \\
&+ \mathrm{Tr}\Bigg[\sum_{j=1}^{\infty} \Big(h_j(F) e_-^j \rho e_+^j h_j^\dagger(F) e_+^l - \frac{1}{2} \{ (e_+^j h_j^\dagger(F) h_j(F) e_-^j), \rho \} e_+^l \Big) \Bigg] \,.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

1. Si consideri[6] in primo luogo $j \geq 0$.

   (a) Un primo termine è dato da:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}[\, g_j(F) e_+^j \rho e_-^j g_j^\dagger(F) e_+^l \,] = \\
= \ & \mathrm{Tr}[\, \rho e_-^j g_j^\dagger(F) e_+^l g_j(F) e_+^j \,] = \\
= \ & \langle e_-^j g_j^\dagger(F) e_+^l g_j(F) e_+^j \rangle \,.
\end{aligned}$$

   Usando le (4.48) e (4.49):

$$\langle e_-^j g_j^\dagger(F) e_+^l g_j(F) e_+^j \rangle =$$

[6] Si intenderà d'ora in avanti che $f_j(p) = 0$ se $p \notin S$

$$
\begin{aligned}
&= \langle g_j^\dagger(F+j)g_j(F+j-l)e_-^j e_+^{l+j}\rangle = \\
&= \langle g_j^\dagger(f+j)g_j(F+j-l)e_+^l\rangle = \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \rho_{nm}\, g_j^*(m+j)g_j(m+j-l)\langle m|e_+^l|n\rangle = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n+l} g_j^*(n+l+j)g_j(n+j)\ . \qquad (4.59)
\end{aligned}
$$

Esso non è individualmente reale positivo, ma, come si vedrà, i singoli addendi della sua parte reale completano dei quadrati di moduli di numeri complessi. Questa osservazione varrà anche per i suoi analoghi.

(b) Il secondo termine è:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[\,\rho e_-^j g_j^\dagger(F)g_j(F)e_+^j e_+^l\,] = \\
&= \langle g_j^\dagger(F+j)g_j(F+j)e_+^l\rangle = \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \rho_{nm}|g_j(m+j)|^2\langle m|e_+^l|n\rangle = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n+l}|g_j(n+l+j)|^2\ . \qquad (4.60)
\end{aligned}
$$

(c) Infine il terzo termine:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[\,e_-^j g_j^\dagger(F)g_j(F)e_+^j \rho e_+^l\,] = \\
&= \langle e_+^l g_j^\dagger(F+j)g_j(F+j)\rangle = \\
&= \langle g_j^\dagger(F+j-l)g_j(F+j-l)e_+^l\rangle = \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \rho_{nm}|g_j(m+l-j)|^2\langle m|e_+^l|n\rangle = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n+l}|g_j(n+j)|^2\ . \qquad (4.61)
\end{aligned}
$$

2. Si consideri adesso $j<0$. Si porrà $j \mapsto -j$ dove ora $j>0$. $h_j(F)$ indicherà $f_{-j}(F)$ come nella (4.58)

(a) In questo caso il primo termine è :

$$\begin{aligned} & \mathrm{Tr}[\, h_j(F) e_-^j \rho e_+^j h_j^\dagger(F) e_+^l \,] = \\ = \; & \langle e_+^j h_j^\dagger(F) e_+^l h_j(F) e_-^j \rangle = \\ = \; & \left\langle h_j^\dagger(F-j) h_j(F-j-l) e_+^l \sum_{k=j}^{\infty} |k\rangle\langle k| \right\rangle . \end{aligned}$$

Poiché $e_+^l|k\rangle = |k+l\rangle$ e nella serie che compare si ha $k \geq j$, la $h_j(F-j-l)$ agisce su vettori $|m\rangle$ con $m \geq j+l$, quindi nessun termine di tale serie si annulla. Nel fare la traccia, invece, la serie che compare partirà da j anziché da 0:

$$\begin{aligned} & \left\langle h_j^\dagger(F-j) h_j(F-j-l) e_+^l \sum_{k=j}^{\infty} |k\rangle\langle k| \right\rangle = \\ = \; & \sum_{n=j}^{\infty} \rho_{n,n+l} h_j^*(n+l-j) h_j(n-j) \; . \end{aligned} \tag{4.62}$$

(b) Il secondo termine è:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Tr}[\, \rho e_+^j h_j^\dagger(F) h_j(F) e_-^j e_+^l \,] = \\ = \; & \left\langle h_j^\dagger(F-j) h_j(F-j) \sum_{k=j}^{\infty} |k\rangle\langle k| e_+^l \right\rangle . \end{aligned}$$

In questo caso l'indice n della serie che produce la traccia dev'essere $n \geq j-l$:

$$\begin{aligned} & \left\langle h_j^\dagger(F-j) h_j(F-j) \sum_{k=j}^{\infty} |k\rangle\langle k| e_+^l \right\rangle = \\ = \; & \sum_{n=\max(0,j-l)}^{\infty} \rho_{n,n+l} |h_j(n+l-j)|^2 \; . \end{aligned} \tag{4.63}$$

(c) Infine il terzo termine è:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Tr}[\, e_+^j h_j^\dagger(F) h_j(F) e_-^j \rho e_+^j \,] = \\ = \; & \langle e_+^l e_+^j h_j^\dagger(F) h_j(F) e_-^j \rangle = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle h_j^\dagger(F-j)h_j(F-j)e_+^l \sum_{k=j}^{\infty}|k\rangle\langle k|\right\rangle = \\
&= \sum_{n=j}^{\infty}\rho_{n,n+l}|h_j(n-j)|^2 \, .
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

Ponendo i termini (4.59), (4.60), (4.61), (4.62), (4.63) e (4.64) nella (4.58) si ottiene il contributo l-esimo:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\Big(\mathrm{Tr}[\, L'(\rho)e_+^l\,]\Big) = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\rho_{n,n+l}\bigg(-\frac{1}{2}|g_j(n+j+l)|^2 - \frac{1}{2}|g_j(n+j)|^2 + \\
&\qquad +\mathrm{Re}\Big(g_j^*(n+j+l)g_j(n+j)\Big)\bigg) + \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}\rho_{n,n+l}\bigg(-\frac{1}{2}|h_j(n+l-j)|^2 - \frac{1}{2}|h_j(n-j)|^2 + \\
&\qquad +\mathrm{Re}\Big(h_j^*(n+j+l)h_j(n-j)\Big)\bigg) + \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{l}\sum_{n=0}^{j-1}\rho_{n,n+l}\bigg(-\frac{1}{2}|h_j(n+l-j)|^2\bigg) + \\
&\qquad + \sum_{j=l+1}^{\infty}\sum_{n=j-l}^{j-1}\rho_{n,n+l}\bigg(-\frac{1}{2}|h_j(n+l-j)|^2\bigg) = \\
&= -\frac{1}{2}\bigg\{ \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\rho_{n,n+l}\Big(|g_j(n+j+l)-g_j(n+j)|^2\Big)\bigg\} + \\
&\qquad -\frac{1}{2}\bigg\{ \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}\rho_{n,n+l}\Big(|h_j(n-j+l)-h_j(n-j)|^2\Big)\bigg\} + \\
&\qquad -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\sum_{n=0}^{\infty}\rho_{n,n+l}|h_j(n-j+l)|^2 + \\
&\qquad -\frac{1}{2}\sum_{j=l+1}^{\infty}\sum_{n=j-l}^{\infty}\rho_{n,n+l}|h_j(n-j+l)|^2 \leq 0 \, ,
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

dove la disuguaglianza è ottenuta tenendo conto che $\rho_{nm} \geq 0$ per qualunque $n, m \in \mathbb{N}$.

Essendo il contributo l-esimo alla (4.57) negativo lo è anche l'intera somma. Pertanto la derivata di D è positiva, poiché la serie in (4.57) è preceduta da un segno meno. Ciò significa che D cresce nel tempo, indipendentemente da quale sia la master equation.

4.3.2 Calcolo per $S = \mathbb{Z}$

Nel caso $S = \mathbb{Z}$ non c'è un limite inferiore allo spettro di F, perciò le f_j sono definite anche per argomenti negativi. Inoltre, per la (4.28) non c'è differenza tra gli operatori $e_-^n e_+^n$ ed $e_+^n e_-^n$.

Pertanto, mentre i termini (4.59), (4.60) e (4.61) si calcolano nello stesso modo e danno lo stesso risultato, con la sola differenza che la serie sugli n va da $-\infty$ a $+\infty$, quelli che cambiano sono i termini (4.62), (4.63) e (4.64), che saranno ora calcolati.

1. Si considera qui solo il caso $j < 0$, ponendo, come per $S = \mathbb{N}$, $j \mapsto -j$, dove $j > 0$ ed h_j indica f_{-j}

   (a) Il primo termine è:

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}[\, h_j(F) e_-^j \rho e_+^j h_j^\dagger(F) e_+^l \,] = \\
= \ & \langle e_+^j h_j^\dagger(F) e_+^l h_j(F) e_-^j \rangle = \\
= \ & \langle h_j^\dagger(F-j) h_j(F-j-l) e_+^l \rangle = \\
= \ & \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \rho_{nm} h_j^*(m-j) h_j(m-j-l) \langle m | e_+^l | n \rangle = \\
= \ & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_{n,n+l} h_j^*(n-j+l) h_j(n-j) \, . \qquad (4.66)
\end{aligned}
$$

   (b) Il secondo termine è:

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}[\, \rho e_+^j h_j^\dagger(F) h_j(F) e_-^j e_+^l \,] = \\
= \ & \langle h_j^\dagger(F-j) h_j(F-j) e_+^l \rangle = \\
= \ & \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \rho_{nm} |h_j(m-j)|^2 \langle m | e_+^l | n \rangle =
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_{n,n+l} |h_j(n-j+l)|^2 \ . \tag{4.67}$$

(c) Infine si ha il termine:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}[\, e_+^j h_j^\dagger(F) h_j(F) e_-^j e_+^l \,] = \\
= \ & \langle e_+^l e_+^j h_j^\dagger(F) h_j(F) e_-^j \rangle = \\
= \ & \langle h_j^\dagger(F-j-l) h_j(F-j-l) e_+^l \rangle = \\
= \ & \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \rho_{mn} |h_j(m-j-l)|^2 \langle m | e_+^l | n \rangle = \\
= \ & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_{n,n+l} |h_j(n-j)|^2 \ .
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Il contributo l-esimo è quindi, secondo la (4.58):

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Re}\Big(\mathrm{Tr}[\, L'(\rho) e_+^l \,] \Big) = \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_{n,n+l} |f_j(n+j+l) - f_j(n+j)|^2 \leq 0 \ .
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Anche in questo caso, quindi, D cresce nel tempo indipendentemente dalla master equation.

4.3.3 Calcolo per $S = \mathbb{Z}_{q+1}$

Questo è il calcolo più complicato dei tre. Innanzi tutto, come è evidente dalle (4.34) e (4.9) si dovrà porre:

$$l, j \leq q \ ;$$

perciò la (4.58) diventa:

$$\mathrm{Tr}[\, L'(\rho) e_+^l \,] = \mathrm{Tr}\Bigg[\sum_{j=0}^{q} \Big(V_j \rho V_j^\dagger e_+^l - \frac{1}{2} \{ V_j^\dagger V_j, \rho \} e_+^l \Big) \Bigg] +$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathrm{Tr}\Big[\sum_{j=1}^{q}\Big(V_{-j}\rho V_{-j}^\dagger e_+^l-\frac{1}{2}\{V_j^\dagger V_j,\rho\}e_+^l\Big)\Big]=\\
=\;&\mathrm{Tr}\Big[\sum_{j=0}^{q}\Big(g_j(F)e_+^j\rho e_-^j g_j^\dagger(F)e_+^l-\frac{1}{2}\{(e_-^j g_j^\dagger(F)g_j(F)e_+^j),\rho\}e_+^l\Big)\Big]+\\
&+\mathrm{Tr}\Big[\sum_{j=1}^{q}\Big(h_j(F)e_-^j\rho e_+^j h_j^\dagger(F)e_+^l-\frac{1}{2}\{(e_+^j h_j^\dagger(F)h_j(F)e_-^j),\rho\}e_+^l\Big)\Big]\;,
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

dove si è posto, come negli altri casi, $g_j(F)=f_j(F)$ per $j\geq 0$, ed $h_{-j}(F)=f_j(F)$ per $j<0$.

Ulteriori limitazioni su j ed l scaturiranno, come si vedrà, dai calcoli. Si procederà ora con il calcolo dei vari termini della (4.70)

1. Si considererà ora $j\geq 0$

   (a) Il primo termine è:

   $$
   \begin{aligned}
   &\mathrm{Tr}[\,g_j(F)e_+^j\rho e_-^j g_j^\dagger(F)e_+^l\,]=\\
   =\;&\mathrm{Tr}[\,\rho e_-^j g_j^\dagger(F)e_+^l g_j(F)e_+^j\,]=\\
   =\;&\langle e_-^j g_j^\dagger(F)e_+^l g_j(F)e_+^j\rangle=\\
   =\;&\Big\langle g_j(F+j)g_j(F+j-l)\sum_{k=0}^{q-j}|k\rangle\langle k|e_+^l\Big\rangle\;,
   \end{aligned}
   $$

   dove si è tenuto conto della (4.40). È chiaro che, comparendo $e_+^l e_+^j=e_+^{(l+j)}$ dev'essere $j+l\leq q$.

   Proseguendo nel calcolo si ha:

   $$
   \begin{aligned}
   &\sum_{n=0}^{q}\sum_{m=0}^{q-j}\rho_{nm}g_j^*(m+j)g_j(m+j-l)\langle m|e_+^l|n\rangle=\\
   =\;&\sum_{n=0}^{q-j-l}\rho_{n,n+l}g_j^*(n+j+l)g_j(n+j)\;,
   \end{aligned}
   \tag{4.71}
   $$

   dove il limite superiore della somma è determinato dal fatto che m ha valore massimo $q-j$ ed $m=n+l$, quindi il valore massimo di $n = m - l$ è $q - j - l$, che non può scendere sotto lo zero per via della condizione $j + l \leq q$.

(b) Il secondo termine è dato da:

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}[\,\rho e_-^j g_j^\dagger(F) g_j(F) e_+^j e_+^l\,] = \\
= \; & \left\langle g_j^\dagger(F+j) g_j(F+j) \sum_{k=0}^{q-j} |k\rangle\langle k| e_+^l \right\rangle = \\
= \; & \sum_{n=0}^{q} \sum_{m=0}^{q-j} \rho_{nm} |g_j(m+j)|^2 \langle m|e_+^l|n\rangle = \\
= \; & \sum_{n=0}^{q-l-j} \rho_{n,n+l} |g_j(n+l+j)|^2 \,. \qquad (4.72)
\end{aligned}
$$

Si vedano le osservazioni relative al termine (4.71)

(c) Il terzo termine è:

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}[\, e_-^j g_j^\dagger(F) g_j(F) e_+^j \rho e_+^l\,] = \\
= \; & \langle e_+^l g_j^\dagger(F+j) g_j(F+j)\rangle = \\
= \; & \left\langle g_j^\dagger(F+j-l) g_j(F+j-l) e_+^l \sum_{k=0}^{q-j} \right\rangle = \\
= \; & \sum_{n=0}^{q-j} \sum_{m=0}^{q} \rho_{nm} |g_j(m+l-j)|^2 \langle m|e_+^l|n\rangle = \\
= \; & \sum_{n=0}^{\min(q-j,q-l)} \rho_{n,n+l} |g_j(n+j)|^2 \,. \qquad (4.73)
\end{aligned}
$$

In questo caso il limite sulla somma sull'indice k si è trasferito ad n anziché ad m, come nei casi precedenti. Inoltre, il valore massimo di m per cui g_j non si annulla è il minimo tra q e $q-j+l$. Pertanto il valore massimo di $n = m-l$ è il minimo tra $q-l$ e $q-j$. Un'ultima osservazione è che non comparendo in questo termine il prodotto $e_+^j e_+^l = e_+^{(j+l)}$ non c'é la limitazione $j + l \leq q$.

2. Si affronterà ora il calcolo per $j < 0$. Come nei due casi precedenti si porrà $j \mapsto -j$ con $j > 0$ e $h_j(F) = f_{-j}(F)$.

   (a) Il primo termine è dato da:

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}[\, h_j(F) e_-^j \rho e_+^j h_j^\dagger(F) e_+^l \,] = \\
= \;& \langle e_+^j h_j^\dagger(F) e_+^l h_j(F) e_-^j \rangle = \\
= \;& \Big\langle h_j^\dagger(F-j) h_j(F-j-l) e_+^l \Big(\sum_{k=j}^{q} |k\rangle\langle k| \Big) \Big\rangle = \\
= \;& \sum_{n=j}^{q} \sum_{m=0}^{q} \rho_{nm} h_j^*(m-j) h_j(m-j-l) \langle m | e_+^l | n \rangle = \\
= \;& \sum_{n=j}^{q-l} \rho_{n,n+l} h_j^*(n-j+l) h_j(n-j) \; .
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

   Qui compare $e_+^{(j+l)}$ quindi $j + l \leq q$. Per quanto riguarda i limiti delle somme, $m = n+l$, quindi il suo minimo è $j+l$, che è anche il minimo valore che non annulla $h_j^*(m-j)h_j(m-j-l)$. Il massimo valore permesso ad n è poi $q-l$, pioché non ci sono limiti superiori su $m = n+l$ se non che sia al massimo uguale a q.

   (b) Il secondo termine è:

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}[\, \rho e_+^j h_j^\dagger(F) h_j(F) e_-^j e_+^l \,] = \\
= \;& \Big\langle h_j^\dagger(F-j) h_j(F-j) \sum_{k=j}^{q} |k\rangle\langle k| e_+^l \Big\rangle = \\
= \;& = \sum_{n=0}^{q} \sum_{m=j}^{q} \rho_{nm} |h_j(m-j)|^2 \langle m | e_+^l | n \rangle = \\
= \;& \sum_{n=\max(0,j-l)}^{q-l} \rho_{n,n+l} |h_j(n+l-j)|^2 \; .
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

   Il massimo tra 0 e $j - l$ è dovuto al fatto che la somma su m parte da j. Quindi $n = m - l$ ha come valore minimo $j - l$.

Tuttavia $n \geq 0$, quindi se $j - l < 0$ la somma sull'indice n parte da zero. Si osservi infine che non c'è il vincolo $j + l \leq q$, non comparendo il prodotto $e_+^l e_+^j$.

(c) Finalmente il terzo termine è:

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}[\, e_+^j h_j^\dagger(F) h_j(F) e_-^j \rho e_+^j \,] = \\
= \;& \langle e_+^l e_+^j h_j^\dagger(F) h_j(F) e_-^j \rangle = \\
= \;& \Big\langle h_j^\dagger(F - j) h_j(F - j) e_+^l \sum_{k=j}^{q} |k\rangle\langle k| \Big\rangle = \\
= \;& \sum_{n=j}^{q} \sum_{m=0}^{q} \rho_{nm} |h_j(m - j - l)|^2 \langle m| e_+^l |n\rangle = \\
= \;& \sum_{n=j}^{q-l} \rho_{n,n+l} |h_j(n - j)|^2 \, .
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

Per questo termine c'è la condizione $j + l \leq q$. Per i limiti sulle somme si vedano le osservazioni relative al termine (4.74).

Considerando ora tutti i termini (4.71), (4.72), (4.73), (4.74), (4.75) e (4.76), e ponendoli nella (4.70), si ottiene:

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Re}\Big(\mathrm{Tr}[\, L'(\rho) e_+^l \,] \Big) = \\
= \;& -\frac{1}{2} \Big\{ \sum_{j=0}^{q-l} \sum_{n=0}^{q-l-j} \rho_{n,n+l} \Big(|g_j(n + j + l) - g_j(n + j)|^2 \Big) \Big\} + \\
& -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{q-l} \sum_{n=q-l-j+1}^{\min(q-j, q-l)} \rho_{n,n+l} |g_j(n + j)|^2 + \\
& -\frac{1}{2} \sum_{j=q-l+1}^{q} \sum_{n=0}^{\min(q-j, q-l)} \rho_{n,n+l} |g_j(n + j)|^2 + \\
& -\frac{1}{2} \Big\{ \sum_{j=1}^{q-l} \sum_{n=j}^{q-l} \rho_{n,n+l} \Big(|h_j(n - j + l) - h_j(n - j)|^2 \Big) \Big\} + \\
& -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{q-l} \sum_{n=\max(0, j-l)}^{j-1} \rho_{n,n+l} |h_j(n - j + l)|^2 +
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=q-l+1}^{q}\sum_{n=\max(0,j-l)}^{q-l}\rho_{n,n+l}|h_j(n-j+l)|^2 \leq 0 \ . \tag{4.77}$$

Ancora in questo caso, come nei due precedenti, la derivata rispetto a t di D è positiva, cioè D cresce nel tempo.

4.3.4 Effetti del termine hamiltoniano

In tutti e tre i casi visti, dunque, $\frac{\partial}{\partial t}\langle \hat{C}\rangle \geq 0$, qualunque sia $C(\phi)$ nella classe di Holevo.

Tuttavia nel definire la derivata rispetto a t non si è tenuto conto del termine hamiltoniano della master equation. Si vedrà ora che questo non modifica i risultati.

Poiché $L'(\rho)$ è covariante, si ha che:

$$W_t \mathrm{e}^{L't}(\rho_0)W_t^\dagger = W_t\rho_D(t)W_t^\dagger = \mathrm{e}^{L't}W_t\rho_0 W_t^\dagger = \mathrm{e}^{L't}\rho_H(t) \ ,$$

dove $W_t = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}$, e $\rho_H(t) = W_t\rho W_t^\dagger$, mentre $\rho_D(t) = \mathrm{e}^{L't}\rho$.

Quindi è equivalente effettuare prima l'evoluzione dissipativa e poi quella hamiltoniana o viceversa. Ciò significa che si può far evolvere la ρ_0 con l'operatore di evoluzione temporale W_t, dopodiché, alla ρ_H così ottenuta, applicare l'evoluzione dissipativa. Si mostrerà di seguito che l'evoluzione hamiltoniana conserva la purezza in fase e non modifica l'indeterminazione D.

Poiché $[\,H, F\,] = 0$, H ed F hanno un sistema ortonormale completo di autovettori comuni, e quindi:

$$H = \sum_{n\in S} E_n|n\rangle \ .$$

Se W_t agisce su uno stato puro in fase ρ, il suo effetto dà:

$$W_t\rho W_t^\dagger = \sum_{n,m\in S} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(E_n-E_m)}{\hbar}t}\rho_{mn}|m\rangle\langle n| \ .$$

Perciò

$$\rho(t)_{mn} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi_m - \chi_n)} \rho_{mn} \ ,$$

dove $\chi_n = -\frac{E_n}{\hbar} t$. Quindi la purezza in fase è conservata.

Inoltre, se ρ è puro in fase e ci si pone nella rappresentazione in cui tutti i suoi elementi sono positivi, il termine l-esimo della derivata temporale di D è:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}\Big[\, \mathrm{i}[\, H, \rho\,] e_+^l + \mathrm{i}[\, H, \rho\,] e_-^l \,\Big] = \\
= \;& \mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\Big[\, [\, H, \rho\,] e_+^l \,\Big] + \mathrm{i}\mathrm{Tr}\Big[\, [\, H, \rho\,] e_-^l \,\Big] = \\
= \;& \mathrm{i}\Big\langle [\, e_+^l, H\,] - [\, H, e_-^l\,] \Big\rangle = \\
= \;& 2\mathrm{Im}\Big\langle [\, H, e_+^l\,] \Big\rangle \ .
\end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\Big\langle [\, H, e_+^l\,] \Big\rangle &= \sum_{m,n \in S} \rho_{nm} (E_n - E_m) \langle m | e_+^l | n \rangle = \\
& \sum_{n \in P} \rho_{n,n+l} (E_{n+l} - E_n) \ ,
\end{aligned}$$

dove $P = \{ n \in S |\ n + l \in S \}$.

Questa somma è evidentemente reale e pertanto la sua parte immaginaria è nulla. Poiché la purezza in fase è conservata, si può dedurre che tale somma ha parte immaginaria nulla in qualunque istante. Ciò significa che il termine hamiltoniano non modifica D. Pertanto, avendo assunto che ρ a $t = 0$ sia puro in fase, appare giustificata la scelta di limitare il calcolo alla parte dissipativa $L'(\rho)$.

4.3.5 Calcolo per la definizione "classica" di indeterminazione in fase

Un'ultima nota è d'obbligo riguardo la definizione di indeterminazione in fase: in letteratura (ad esempio si veda [25]) si usa come definizione di indeterminazione in fase la grandezza $D = 2(1 - |\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \rangle|^2)$.

Essa deriva dallo scarto quadratico medio del modulo di $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$:

$$\begin{aligned}\Delta^2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) &= \int_0^{2\pi} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle|^2 \mathrm{d}p(\phi) = \\ &= 1 - \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle^* - \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\rangle\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle + |\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle|^2 \ .\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{d}p(\phi) = \mathrm{Tr}[\,\rho M_\phi(\mathrm{d}\phi)\,]$, si ha:

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle = \sum_{m,n\in S} \rho_{nm}\xi_{mn} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\phi} = \sum_{n\in P} \rho_{n+1,n}\xi_{n,n+1} \ ,$$

dove $P = \{n \in S|\ n+1 \in S\}$.

Se ora si calcola invece $\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\rangle$ si ottiene:

$$\sum_{n\in P} \rho_{n,n+1}\xi_{n+1,n} = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle^* \ .$$

Perciò $\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\rangle = |\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle|^2$ e quindi:

$$\int_0^{2\pi} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle|^2 \mathrm{d}p(\phi) = 1 - |\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle|^2 \ .$$

Ora, nel caso di stati puri in fase, $\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\rangle$ è dato da:

$$\sum_{n\in P} \rho_{n,n+1} = \mathrm{Tr}\Big[\sum_{m,n\in S} \rho_{nm}|n\rangle\langle m|e_+ \Big] = \langle e_+\rangle \ .$$

quindi $\Delta^2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})$ è:

$$2(1 - |\langle e_+\rangle|^2) \ .$$

La sua derivata temporale, sempre nell'ipotesi che la master equation conservi la purezza in fase, è:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\Delta^2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) = -2\frac{\partial}{\partial t}\,|\langle e_+\rangle|^2 = -2\left(\langle e_+\rangle \frac{\partial}{\partial t}\,\langle e_+\rangle^* + \langle e_+\rangle^* \frac{\partial}{\partial t}\,\langle e_+\rangle\right) \ .$$

Per stati puri in fase, chiaramente[7]:

$$\langle e_+\rangle = \sum_{n\in P} \rho_{n,n+1} \geq 0 \ .$$

Essendo reale, $\langle e_+\rangle^* = \langle e_-\rangle = \langle e_+\rangle$. Ne consegue che:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta^2(\phi) = -2\langle e_+\rangle \frac{\partial}{\partial t}(\langle e_+\rangle + \langle e_-\rangle) \ .$$

Si sa, dai calcoli precedenti, che $\frac{\partial}{\partial t}\langle -(e_+ + e_-)\rangle \geq 0$, essendo l'operatore $e_+ + e_-$ l'operatore costo relativo alla funzione costo $-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})$, che rientra nella classe di Holevo.

Un'altra definizione usata spesso in letteratura (si veda ancora [25]) per l'indeterminazione in fase è l'*r.p.l.* (Reciprocal Peak Likelihood), cioè l'inverso del valore massimo della distribuzione di probabilità della fase. Sia ϕ_M il massimo di $p(\phi|\phi^*)$. Allora l'r.p.l. è:

$$R = \frac{1}{p(\phi_M|\phi^*)} \ .$$

Se si considera $C(\phi - \phi_M) = -\delta_{2\pi}(\phi - \phi_M)$, il valore d'aspettazione di $C(\phi - \phi_M)$ è:

$$\langle C\rangle = -p(\phi_M|\phi^*) \ .$$

È chiaro che se aumenta R aumenta anche $\langle C\rangle$, e viceversa. Pertanto si può in qualche maniera ricondurre l'r.p.l. ad un costo della classe di Holevo. Tuttavia la funzione costo ha come argomento $\phi - \phi_M$ e non $\phi - \phi^*$.

Limitandosi a considerare il caso $\phi_M = \phi^*$, si vede che anche l'r.p.l. può essere ricondotto al valor medio di un costo della classe di Holevo, e pertanto anche questa misura dell'indeterminazione in fase non può che aumentare nel tempo.

Del resto, se $\phi_M \neq \phi^*$, poichè $p(\phi|\phi^*)$ è funzione di ϕ simmetrica rispetto a ϕ^*, come mostrato nella (4.51), il concetto di r.p.l. perde il suo significato di indeterminazione, esistendo almeno due massimi per $p(\phi|\phi^*)$

Anche per l'r.p.l. vale allora quanto mostrato per le altre definizioni di indeterminazione, cioè:

$$\frac{\partial}{\partial t}R \geq 0 \ .$$

[7]Nella base in cui $\rho_{nm} \geq 0$.

4.4 Il legame tra squeezing isotropo in fase e freccia del tempo

Si è visto che per stati puri in fase e per master equation che conservano la purezza in fase, comunque[8] si definisca l'indeterminazione in fase, essa aumenta nel tempo.

Lo squeezing in fase dovrebbe produrre proprio l'effetto opposto, cioè un restringimento di tale indeterminazione.

Affinché sia $\frac{\partial}{\partial t} D < 0$, con una mappa covariante, è necessario porre un segno meno davanti all'espressione di L', perdendo la completa positività, ovvero porre un segno meno davanti al simbolo di derivazione rispetto a t, il che equivale ad invertire l'asse dei tempi.

Questa "asimmetria" è dovuta all'irreversibilità della generica evoluzione considerata.

Poiché la dinamica dei sistemi aperti fa che essi procedano nel tempo in modo irreversibile, a differenza di quella hamiltoniana, tramite l'evoluzione dei sistemi fisici reali è possibile definire, oltre ad un asse dei tempi, una freccia del tempo, che orienta tale asse in un verso preciso.

Con i precedenti calcoli si è mostrato che il processo di squeezing isotropo in fase corrisponde ad una inversione della freccia del tempo così definita, e pertanto non può essere reale.

Per quanto riguarda i limiti di validità di tali affermazioni, come detto in precedenza, si rimanda al paragrafo (4.6).

4.5 Master equation che preserva D

Si consideri ora la derivata di D nel caso $S = \mathbb{N}$. Si osserva facilmente che si può cercare di realizzare il caso $\frac{\partial}{\partial t} D = 0$. Ciò avviene se si annullano separatamente tutti i termini delle quattro serie che compaiono nella (4.65). Da questa considerazione nasce l'idea di cercare la master

[8] Entro i limiti discussi nel precedente paragrafo

equation che preserva D ed eventuali stati stazionari per la sua parte dissipativa, in tutti e tre i casi.

4.5.1 Caso $S = \mathbb{N}$

Si cercherà ora la forma della master equation che mantiene costante l'indeterminazione in fase degli stati puri in fase.

La condizione per i termini della prima serie che compare nella (4.65) è:

$$g_j(n+j+l) - g_j(n+j) = 0 \qquad \forall n, j, l \in \mathbb{N} \ . \tag{4.78}$$

Considerando $l = 1$ ciò implica che sia:

$$g_j(n+j+1) = g_j(n+j) \qquad \forall n, j \in \mathbb{N} \ ,$$

quindi:

$$g_j(m) = g_j(m+1) \qquad \forall m, j \in \mathbb{N} \ . \tag{4.79}$$

Se ciò è vero la condizione (4.78) è automaticamente verificata qualunque sia $l \in \mathbb{N}$.

La condizione (4.79) è equivalente a:

$$g_j(m) = g_j \qquad \forall m, j \in \mathbb{N} \ , \tag{4.80}$$

dove g_j è una costante il cui valore dipende dall'indice j.

In conseguenza della (4.80) si ha che gli operatori V_j, per $j \geq 0$, hanno la forma:

$$V_j = g_j e_+^j \qquad \forall j \geq 0 \ . \tag{4.81}$$

Per i termini della seconda serie della (4.65) si ha che:

$$h_j(n-j+l) = h_j(n-j) \qquad \forall n, l \in \mathbb{N} \quad \forall j < n \ , \tag{4.82}$$

e quindi, seguendo un analogo ragionamento, si ottiene la condizione:

$$h_j(m) = h_j(m+1) \qquad \forall m, j \in \mathbb{N} \ . \tag{4.83}$$

Tuttavia, per quanto riguarda le h_j, esse hanno un comportamento diverso dalle g_j, e ciò è dovuto alla condizione di annullamento sui termini della terza e quarta serie della (4.65), che implica, in particolare:

$$h_j(0) = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{N} \; .$$

Si ha allora, per ricorrenza:

$$h_j(m) = 0 \qquad \forall m, j \in \mathbb{N} \; . \tag{4.84}$$

La master equation è allora:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \sum_{j=1}^{\infty} |g_j|^2 \Big\{ e_+^j \rho e_-^j - \rho \Big\} - \mathrm{i}[\, H, \rho\,] \; . \tag{4.85}$$

Si può ora separare, come si è giustificato nel paragrafo 4.3.5, la parte dissipativa da quella hamiltoniana. In questo modo si mostrerà che tale master equation conserva la purezza in fase dello stato iniziale.

Poiché

$$\rho_{ij}(t) = \Big\{ \mathrm{e}^{L't}(\rho) \Big\}_{ij} = \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L't)^n}{n!}(\rho) \Big\}_{ij} \; ,$$

ed L' è limitato, l'elemento ρ_{ij} come funzione di t è analitico. Pertanto basta conoscerne tutte le derivate per $t = 0$ per determinarne le caratteristiche ad ogni t.

A $t = 0$ la derivata n-esima di ρ_{ij} è data da una somma di termini del tipo:

$$\pm \langle i | \sum_{k_1=0}^{\infty} ... \sum_{k_n=0}^{\infty} |g_{k_1}|^2 ... |g_{k_n}|^2 e_+^{\sum_{t\in I} k_t} \rho e_-^{\sum_{t \in I} k_t} | j \rangle \; ,$$

dove $I \subseteq \{0, ..., n\}$.

Tale somma è evidentemente reale, perciò:

$$\rho_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_{ij}^{(n)}(0)}{n!} t^n \in \mathbb{R} \; .$$

È evidente che $\rho_{ij}(t)$ ha tutte le derivate reali. Se tutte le derivate di ρ_{ij} sono reali, allora la fase ϕ_{ij} ha tutte la derivate nulle, perciò ρ resta pura in fase. Con la sola ipotesi che ρ sia pura in fase, si ha che la derivata di D è nulla. Pertanto la derivata di D è identicamente nulla, quindi D è costante.

Si cercheranno ora eventuali stati stazionari per tale master equation, cioè stati per i quali[9] $L'(\rho) = 0$.

Imponendo tale condizione sugli elementi di matrice della ρ si osserva che dev'essere:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{mn} = \sum_{j=1}^{\min(m,n)} |g_j|^2 \rho_{m-j,n-j} - \sum_{j=1}^{\infty} |g_j|^2 \rho_{mn} = 0 \ .$$

Ponendo $\sum_{j=1}^{\infty} |g_j|^2 = R \in \mathbb{R}_+$ si ha:

$$R\rho_{mn} = \sum_{j=1}^{\min(m,n)} |g_j|^2 \rho_{m-j,n-j} \ .$$

La condizione sugli elementi della ρ è data allora dal sistema di infinite equazioni accoppiate:

$$\rho_{mn} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} |g_j|^2 \rho_{m-j,n-j}}{R} \qquad m \leq n \ . \tag{4.86}$$

Si può tentare di risolvere tale sistema per ricorrenza.

Innanzi tutto si osserva che l'elemento ρ_{00} ha un valore fissato, e con esso tutti i termini diagonali. È evidente infatti che $\rho_{11} = \frac{|g_1|^2}{R}\rho_{00}$. Poiché poi ρ_{ii} è combinazione dei termini diagonali con indici più bassi, ρ_{ii} è proporzionale a ρ_{00}. Chiamando Γ_i la costante di proporzionalità, si ha che:

$$\mathrm{Tr}[\,\rho\,] = \rho_{00}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) = 1 \ ,$$

perciò:

$$\rho_{00} = \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i} \ ,$$

[9]Infatti, se $L'(\rho) = 0$, allora $L'^n(\rho) = L'^{n-1}\big(L'(\rho)\big) = 0$, quindi l'evoluzione dissipativa non ha effetto su ρ: $\rho(t) = \exp(L't)(\rho) = \rho$

e, per gli altri termini diagonali:

$$\rho_{nn} = \frac{\Gamma_n}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i} \; .$$

Per i termini fuori diagonale ogni sovradiagonale è determinata in modo analogo dal primo suo termine ρ_{0n}. C'è pertanto una certa arbitrarietà[10] nella scelta dei termini ρ_{0n} che lascia supporre che la soluzione non sia un'unica ρ ma un sottoinsieme convesso dell'insieme $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ degli stati del sistema.

Una ρ che soddisfa tali condizioni evolve sotto l'azione della master equation che preserva la fase come se fosse libera, non risentendo dell'interazione con il bagno.

4.5.2 Caso $S = \mathbb{Z}$

In tal caso, la serie per i valori negativi di j è unica, e della stessa forma di quella per $j \geq 0$; non sussistendo pertanto la condizione $h_j(0) = 0$ vale la stessa condizione che vale per le g_j. Perciò, in generale:

$$f_j(m) = f_j \qquad \forall m, j \in \mathbb{Z} \; .$$

La master equation è allora:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |f_j|^2 \Big\{ e_+^j \rho e_-^j - \rho \Big\} - \mathrm{i}[\, H, \rho\,] \; , \tag{4.87}$$

ovvero, separando la serie in due blocchi ed eliminando la parte hamiltoniana:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho = \sum_{j=1}^{\infty} |g_j|^2 \Big\{ e_+^j \rho e_-^j - \rho \Big\} + \sum_{j=1}^{\infty} |h_j|^2 \Big\{ e_-^j \rho e_+^j - \rho \Big\} \; . \tag{4.88}$$

Anche in questo caso la master equation conserva la purezza in fase, come si può facilmente verificare analogamente al caso $S = \mathbb{N}$.

[10] L'arbitrarietà non è completa, poichè la ρ deve soddisfare la condizione di positività

Per quanto riguarda la ricerca degli stati stazionari, si ha, ponendo come prima $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |f_j|^2 = R$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{mn} = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(|g_j|^2\rho_{m-j,n-j} - \rho_{mn}\Big) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty}|h_j|^2\Big(\rho_{m+j,n+j} - \rho_{mn}\Big) = 0 \; . \tag{4.89}$$

Le equazioni cui deve soddisfare l'eventuale ρ stazionaria sono:

$$\rho_{mn} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty}|g_j|^2\rho_{m-j,n-j} + \sum_{j=1}^{\infty}|h_j|^2\rho_{m+j,n+j}}{R} \; . \tag{4.90}$$

In questo caso, poiché l'equazione per ogni elemento di matrice coinvolge tutti gli elementi sulla stessa sovradiagonale (o sottodiagonale) è impossibile la ricerca di una soluzione per ricorrenza, e si complica ulteriormente rispetto al caso precedente.

4.5.3 Caso $S = \mathbb{Z}_{q+1}$

In questo caso non esiste nessuna master equation per cui $\frac{\partial}{\partial t} D$ per tutti gli stati puri in fase.

Dalla (4.77), infatti, si osserva che dev'essere:

$$\begin{aligned} g_j(m) &= 0 \qquad \forall m \in S \quad \forall j \leq q \\ h_j(m) &= 0 \qquad \forall m \in S \quad \forall j \leq q \; . \end{aligned}$$

Pertanto un sistema con generatore F a spettro finito è il genere di sistema per cui è più difficile conservare le proprietà di fase di un sistema; per lo meno da un punto di vista teorico, infatti, i due casi precedentemente analizzati presentano la possibilità di mantenere costante l'indeterminazione in fase, mentre per sistemi con F a spettro finito si può solo cercare di minimizzare l'aumento di D.

4.6 Limiti di validità della dimostrazione

Si è accennato in vari punti che si sarebbe discusso entro quali limiti vale quanto si è dimostrato, e ciò si farà in questo paragrafo.

Nella dimostrazione che $\frac{\partial}{\partial t} D \geq 0$ si è assunto che la master equation conservi la purezza in fase. Ciò, tuttavia, non è affatto scontato, come rivelano le seguenti considerazioni.

La derivata in t di un generico elemento di ρ, $\rho_{mn} = \psi_{mn} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{mn}}$, è data da:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{mn} \doteq \dot{\rho}_{mn} = \dot{\psi}_{mn} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{mn}} + \mathrm{i}\dot{\phi}_{mn} \psi_{mn} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{mn}} \ .$$

Per stati che a $t = 0$ sono puri in fase, $\phi_{mn} = 0$, perciò:

$$\dot{\rho}_{mn} = \dot{\psi}_{mn} + \mathrm{i}\dot{\phi}_{mn} \psi_{mn} \ .$$

La derivata $\dot{\phi}_{mn}$ va pertanto "estratta" dalla parte immaginaria di $\dot{\rho}_{mn}$.

Ora,

$$\dot{\rho}_{mn} = \langle m | L'(\rho) | n \rangle - \mathrm{i}(E_m - E_n)\rho_{mn} \ .$$

È chiaro, come si è anche visto in precedenza, che la parte hamiltoniana conserva la purezza in fase e può essere trascurata[11].

Perciò:

$$\mathrm{i}\dot{\phi}_{mn} \psi_{mn} = \frac{1}{2} \Big(\langle m | L'(\rho) | n \rangle - \langle m | L'(\rho) | n \rangle^* \Big) \ .$$

Ad esempio, nel caso $S = \mathbb{N}$ si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\dot{\phi}_{mn} \psi_{mn} \ = \ & \frac{1}{2} \Bigg\{ \sum_{j=0}^{\min(m,n)} g_j(m) g_j^*(n) \rho_{m-j,n-j} + \\ & - \sum_{j=0}^{\infty} |g_j(m+j)|^2 \rho_{mn} + \\ & - \sum_{j=0}^{\infty} |g_j(n+j)|^2 \rho_{mn} - c.c \Bigg\} + \end{aligned}$$

[11] Nel senso che l'evoluzione hamiltoniana viene applicata a ρ ottenendo $\rho_H(t)$, e quest'ultima viene poi evoluta con $\exp(L't)$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Bigg\{ & \sum_{j=1}^{\infty} h_j(m)h_j^*(n)\rho_{m+j,n+j} + \\
& - \sum_{j=1}^{m} |h_j(m+j)|^2 \rho_{mn} + \\
& \quad - \sum_{j=1}^{n} |h_j(n+j)|^2 \rho_{mn} - c.c \Bigg\} ,
\end{aligned}
$$

dove *c.c.* indica il complesso coniugato del primo termine.

Quindi si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}_{mn} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\Bigg\{ \sum_{j=0}^{\min(m,n)} \Big(g_j(m)g_j^*(n) - g_j^*(m)g_j(n)\Big)\frac{\rho_{m-j,n-j}}{\rho_{mn}} + \\
& + \sum_{j=0}^{\infty} \Big(h_j(m)h_j^*(n) - h_j^*(m)h_j(n)\Big)\frac{\rho_{m+j,n+j}}{\rho_{mn}} \Bigg\} .
\end{aligned}
$$

Nei casi $S = \mathbb{Z}$ ed $S = \mathbb{Z}_{q+1}$ si hanno soltanto diversi estremi per le somme.

Evidentemente questa derivata non è data necessariamente da una differenza del tipo $(\chi_m - \chi_n)$ e pertanto non è vero che la master equation conserva sempre la purezza in fase.

Tuttavia si può dimostrare che, anche tenendo conto del termine:

$$
\mathrm{Tr}\Big[\, \rho\Big(\frac{\partial}{\partial t}\,\hat{C}\Big) \Big] ,
$$

nel computo di $\frac{\partial}{\partial t} D$ si ha, almeno per $t = 0$, una derivata positiva.

Se lo stato non resta puro in fase, anche la POM ottima cambia. Le fasi degli elementi della ξ compensano quelle degli elementi della ρ, e si sa come variano. Inoltre, poiché ξ dev'essere autoaggiunta, $\dot{\phi}_{mn} = -\dot{\phi}_{nm}$. Per quanto riguarda il modulo $|\xi_{mn}|$, non si sa come esso cambi, ma si sa che, per stati non puri in fase esso deve diminuire rispetto al valore 1, come mostrato nel teorema 2.5.1, pertanto, almeno per $t = 0$, la derivata di $|\xi_{mn}|$ è negativa.

Ricordando la (4.53):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\hat{C} &= -\frac{1}{2}\mathrm{i}\sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{m\in P_l}\Big(\dot{\phi}_{m+l,m}|m+l\rangle\langle m| + \dot{\phi}_{m,m+l}|m\rangle\langle m+l|\Big) + \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m\in P_l}\Big[\dot{|\xi_{m+l,m}|}\Big(|m+l\rangle\langle m|\Big) + \dot{|\xi_{m,m+l}|}\Big(|m\rangle\langle m+l|\Big)\Big] ,
\end{aligned}$$

dove $P_l = \{m \in S|\ m+l \in S\}$.

Ora, ponendo questa in $\mathrm{Tr}\Big[\rho\frac{\partial}{\partial t}\hat{C}\Big]$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\mathrm{i}\sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{m\in P_l}\Big(\dot{\phi}_{m+l,m}\rho_{m,m+l} + \dot{\phi}_{m,m+l}\rho_{m+l,m}\Big) + \\
&-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m\in P_l}\Big(\dot{|\xi_{m+l,m}|}\rho_{m,m+l} + \dot{|\xi_{m,m+l}|}\rho_{m+l,m}\Big) .
\end{aligned}$$

Essendo evidentemente $\rho_{mn} = \rho_{nm}$ e $|\xi_{mn}| = |\xi_{nm}|$, si ha:

$$\mathrm{Tr}\Big[\rho\frac{\partial}{\partial t}\hat{C}\Big] = -\sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{m\in P_l}\dot{|\xi_{m+l,m}|}\rho_{m,m+l} . \tag{4.91}$$

Questo contributo è evidentemente positivo, perché c_l e $\rho_{m,m+l}$ sono positivi mentre $\dot{|\xi_{m+l,m}|}$ è negativo.

Almeno per un certo intervallo di tempo, quindi, anche se non si conserva la purezza in fase, l'indeterminazione in fase cresce nel tempo, anzi cresce più in fretta che se la master equation conservasse la purezza in fase, per via del contributo aggiuntivo dato dalla derivata della POM ottima.

In un esperimento reale, peraltro, non sarebbe pensabile "aggiornare" la POM ottima all'istante della eventuale misura di fase, mentre è più verosimile un esperimento in cui la fase venga misurata usando sempre la stessa POM, cioè quella iniziale, ottima per lo stato puro in fase iniziale.

Ad ulteriore conferma che il risultato ottenuto, sebbene condizionato da molte limitazioni, è sufficientemente generale, è il fatto che le proprietà di fase sono definibili, almeno per ora, solo per stati puri in fase, non essendo nota la POM ottima per altri stati.

Capitolo 5

Conclusione

Il proposito con cui si è cominciato questo lavoro è quello di mostrare in termini rigorosi l'affermazione, generalmente accettata, che l'effetto dei meccanismi di irreversibilità sulla fase è una perdita di purezza e di precisione.

Quanto si è mostrato è che, volendo conservare la purezza in fase dello stato di un sistema, non è possibile realizzare lo squeezing in fase, poichè esso coinciderebbe con l'inversione della freccia del tempo.

Per un'evoluzione più generale, che vede uno stato puro in fase perdere tale caratteristica, il risultato che si è ottenuto resta valido solo per un certo intervallo di tempo a partire dall'istante iniziale. Potrebbe accadere che dopo un certo tempo l'indeterminazione diventi stazionaria e quindi cominci a decrescere. Sarebbe tuttavia poco utile sfruttare un tale genere di squeezing in fase; esso infatti sarebbe dovuto alla alta indeterminazione dello stato di partenza, che avrebbe caratteristiche di "bassa purezza" in fase e quindi molto disturbo.

Ciò che invece si potrebbe sperare è che in qualche modo il sistema, dopo un certo intervallo di tempo in cui l'indeterminazione è cresciuta e poi si è cominciata a restringere, "recuperi" la purezza in fase, in uno stato con indeterminazione uguale o addirittura inferiore a quella dell'istante iniziale.

Per cercare una simile eventualità sarebbe necessario analizzare caso per caso ciò che accade, specificando la master equation e lo stato iniziale, e risolvendo quindi le equazioni dinamiche.

Un'altra possibilità sarebbe quella di generalizzare lo studio qui svolto contemplando il caso in cui lo stato non sia puro in fase. Tuttavia ciò richiede preventivamente il calcolo della POM ottima per stati non puri in fase, calcolo che per il momento nessuno ha risolto.

Un'ultima linea possibile per analizzare il comportamento dell'indeterminazione in fase su scale di tempo più lunghe è sfruttare l'analiticità della indeterminazione come funzione del tempo, dovuta alla limitatezza del generatore infinitesimo della dinamica L', e calcolarne tutte le derivate a $t = 0$, ricostruendone quindi l'andamento; questo calcolo, già al second'ordine, presenta però un notevole grado di complicazione e non sembra facilmente calcolabile una forma generale per la generica derivata n-esima.

Ciò che è pensabile è piuttosto un'analisi approssimata, in cui il calcolo viene effettuato numericamente a partire da una data master equation e da un dato stato iniziale puro in fase, troncando lo sviluppo ad un ordine finito.

Un altro spunto interessante di ricerca potrebbe essere la master equation che conserva l'indeterminazione in fase. L'eventuale ricerca di un bagno che, interagendo col sistema, origini tale equazione, potrebbe portare a risultati interessanti, se non per eventuali applicazioni, almeno per una comprensione più approfondita dei meccanismi che disturbano la fase.

Bibliografia

[1] G. M. D'Ariano, Int. J. Mod. Phys. B **6** 1391 (1992)

[2] G. Breitenbach, S. Schiller and J. Mlyneck, Nature **387** 471 (1997)

[3] A. S. Holevo, *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, North-Holland, Amsterdam, 1982

[4] R. D. Richtmyer, *Principles of advanced mathematical physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1978

[5] M. A. Naimark, Iza. Akad. Nauk USSR, Ser. Mat. **4** 277 (1940)

[6] C. W. Helstrom, *Quantum detection and estimation theory*, Academic Press, New York, 1976

[7] A. S. Holevo, Proc. 2nd Japan-USSR Symp. Prob. Theo. Kyoto, Japan **1** 22 (1972)

[8] A. S. Holevo, J. Multivar. Anal. **3** 337 (1973)

[9] H. F. Jones, *Groups, representations and physics*, IOP, Bristol, 1990

[10] S. Sternberg, *Groups theory and physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

[11] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello and M. F. Sacchi, Physics Letters A, **248** 103 (1998)

[12] W. Thirring, *A course in Mathematical physics*, vol. 3 *Quantum mechanics of atoms and molecules*, Springer-Verlag, Wien, 1979

[13] A. Messiah, *Quantum mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1961

[14] G. M. D'Ariano, *Quantum estimation theory and optical detection*, in *Quantum optics and the spectroscopy of solids*, T. Hakioğlu and A. S. Shumovsky Eds., Kluwer, Dordrecht, 1997, p. 139

[15] R. S. Ingarden, A. Kossakowski, Ann. Phys. **89** 451 (1975)

[16] J. Mehra, E. C. G. Sudarshan, Nuovo Cimento, **11** B 215 (1972)

[17] R. S. Phillips, Pacific J. Math. **5** 269 (1955)

[18] E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, American Mathematical Society, Providence, 1957

[19] G. Lindblad, Commun. Math. Phys. **48** 199 (1976)

[20] W. F. Stinespring, Proc. Amer. Math. Soc., **6** 211 (1955)

[21] A. S. Holevo, Quant. Ph/9701037 (1997)

[22] A. S. Holevo, Rept. Math. Phys., **32** 211 (1993)

[23] E. B. Davies, J Funct. Anal., **34** 421 (1979)

[24] O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics* vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1981

[25] M. J. W. Hall, J. Mod. Opt., **5** 809 (1993)