

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE, NATURALI
DIPARTIMENTO DI FISICA "A. VOLTA"

**Amplificazione laser
sotto il limite standard
quantistico**

Relatore:

Chiar.mo Prof. GIACOMO MAURO D'ARIANO

Tesi di laurea di
LORENZO MACCONE

Anno Accademico 1995-1996

Indice

Introduzione	3
1 Concetti introduttivi	7
1.1 La master equation.	7
1.2 Equazione di Fokker-Planck.	11
1.2.1 Funzioni di Wigner	11
1.2.2 Rappresentazione differenziale	14
1.2.3 Metodo per dedurre l'equazione di Fokker-Planck	15
2 Espansione adiabatica per il laser a singolo modo.	18
2.1 Espansione di Born adiabatica della master equation	19
2.2 Modello di laser	25
2.3 Equazione di Fokker-Planck per il laser	28
2.4 Condizioni iniziali per l'equazione di Fokker-Planck.	39
2.5 Confronto con la teoria di L. Lugiato.	41
2.6 Soluzione analitica per il caso stazionario.	43
3 Amplificatori laser.	46
3.1 Modello di rete digitale a fibre ottiche: definizioni e condizioni di validità.	46
3.2 Caratteristiche dell'amplificatore.	52
3.3 Amplificatori lineari.	54
3.4 Amplificatori PIA.	56
3.5 Standard quantum limit.	62
4 Metodi di Simulazione.	65
4.1 Simulazione dell'equazione di Fokker-Planck	66
4.1.1 Funzione di Green per l'equazione di Fokker-Planck	67
4.1.2 Simulazione Monte Carlo della dinamica	68
4.1.3 Calcolo dei valori medi e relativi errori.	73
4.1.4 Stato stazionario.	81
4.2 Metodo del Quantum Jump.	84

4.2.1	Descrizione del metodo del quantum jump	84
4.2.2	Metodo del quantum jump applicato al laser ad un solo atomo.	88
5	Risultati e conclusioni.	91
5.1	Procedimento per l'analisi dei dati.	94
5.2	Sviluppi ulteriori.	95

Introduzione

Le reti di trasmissione a fibre ottiche si sono diffuse al punto da essere diventate uno standard là dove è necessario il trasferimento di grosse quantità di dati. L'elevata banda passante della fibra ottica consente infatti di ottenere una *transfer rate*¹ molto alta. Il tallone di Achille di queste reti è costituito dagli amplificatori in esse presenti. Il processo convenzionale di amplificazione in fibra avviene dopo aver tradotto i segnali ottici in impulsi elettrici; questi vengono amplificati e filtrati mediante dispositivi elettronici e quindi tradotti in nuovi segnali luminosi. Tale procedimento si risolve in una notevole degradazione della banda passante in quanto, per loro natura, i dispositivi elettronici hanno tempi di risposta notevolmente più lunghi dei dispositivi ottici. Per ovviare agli inconvenienti presentati da questo tipo di amplificazione si vanno diffondendo gli amplificatori ottici laser (*Travelling Wave Optical Amplifiers*), in grado di processare il segnale senza impiegare alcuna traduzione, lavorando pertanto a frequenze ottiche. Questi dispositivi sono costituiti da un tratto di fibra opportunamente drogato, in cui si crea un'inversione di popolazione atomica mediante pompaggio ottico. Il segnale in arrivo, avente frequenza pari alla differenza di energia tra i livelli atomici invertiti, viene amplificato con l'effetto "a valanga" del meccanismo di emissione stimolata. Il dispositivo è in pratica un laser con grossa perdita, cioè un laser la cui cavità ottica è delimitata da specchi con alta trasmissività.

Nell'ambito della presente tesi si analizza l'amplificatore in presenza di saturazione e in regimi di funzionamento altamente quantistici, cioè con segnali a basso numero medio di fotoni. La rete di trasmissione che si utilizza è caratterizzata da codifica mediante stati coerenti e stati numero della radia-

¹La transfer rate misura la quantità di informazioni trasmessa per unità di tempo.

zione e da rivelazione diretta. Per la prima volta in questa tesi si valuta la *bit error rate* (BER) dell'amplificatore laser, quantità che misura il numero di errori di trasmissione per unità di tempo dovuti al dispositivo. L'amplificatore ottico è modellizzato mediante le equazioni dinamiche fenomenologiche del laser, che sono simulate al computer con metodi Monte Carlo.

Per la valutazione delle caratteristiche dell'amplificatore simulato, è necessario fare un confronto con un altro tipo di dispositivo. Come termine di paragone si utilizzerà il *Phase Insensitive Amplifier* (PIA) ideale, un amplificatore lineare ottico che amplifica il campo con guadagno indipendente dalla fase del campo. Il PIA ideale può essere realizzato in pratica o come amplificatore parametrico o mediante un amplificatore laser in regimi di funzionamento particolari, che verranno analizzati nel corso di questa tesi. Si può dimostrare che in una linea di trasmissione con schema di rivelazione *heterodina* il PIA ideale non introduce rumore (una certa quantità di rumore è però insita nel rivelatore heterodina). Invece, nelle linee di trasmissione a rivelazione diretta, che si analizzano nella presente tesi, il PIA ideale non è il dispositivo migliore in assoluto in quanto esso introduce una certa bit error rate. L'amplificatore migliore in questo caso è il *Photon Number Amplifier* (PNA), che ha bit error rate nulla.

Le simulazioni sono state compiute utilizzando due distinti metodi Monte Carlo: il metodo del *quantum jump*, che permette di simulare direttamente la master equation del sistema (cioè l'equazione dinamica microscopica), e la simulazione dell'equazione di Fokker–Planck. Quest'ultima è un'equazione differenziale alle derivate parziali che (pur non essendo un'equazione operatoriale) descrive la dinamica del sistema al pari della master equation. Sono state utilizzate due distinte equazioni di Fokker–Planck ricavate a partire dalle due teorie diverse proposte da L. Lugiato [2] e F. Haake [3]. Il confronto fra i risultati ottenuti con i due metodi ha avuto esito positivo, rendendo possibile un controllo accurato del programma di simulazione e confermando le teorie con le quali sono state ricavate le equazioni di Fokker–Planck. È stato dato ampio spazio in questa tesi alla teoria di F. Haake: l'equazione di Fokker–Planck da lui proposta è stata nuovamente ricavata a partire dalla master equation di laser, inserendo una modifica alla teoria che la rende completamente consistente, e che permette di ricavare in maniera diretta una condizione di validità riguardo al tempo a cui la soluzione dell'equazione di Fokker–Planck è calcolata.

I risultati degli studi eseguiti per la presente tesi hanno evidenziato che il

PIA ideale è un dispositivo migliore dell'amplificatore laser in condizioni di saturazione. Infatti la bit error rate dell'amplificatore saturante è risultata essere in tutti i casi, sempre maggiore, o al più dello stesso ordine, di quella del PIA ideale di medesimo guadagno, nonostante che le caratteristiche di rumore in saturazione siano quantitativamente migliori del PIA.

Questa tesi si inserisce in una linea di ricerca nata da alcuni articoli di H. P. Yuen [16], [17], [18] in cui viene proposto l'amplificatore ideale numero (*Photon Number Amplifier*). Questo amplificatore, inserito in una linea di trasmissione digitale con rivelazione diretta ha bit error rate nulla, non aggiunge cioè errori di trasmissione. Il PNA non è facilmente realizzabile in pratica, ma la hamiltoniana che ne descrive la dinamica [19] contiene dei termini di saturazione. Pertanto si sono cercati altri dispositivi che presentino un fenomeno analogo di saturazione, ma siano più semplici da realizzare. Sfruttando la saturazione dell'amplificatore laser simulato mediante l'equazione di Fokker-Planck di Lugiato [2], si ottiene infatti [1] [4] un amplificatore con figura di rumore molto bassa, tale da battere il limite inferiore teorico per gli amplificatori lineari detto *Standard Quantum Limit* (o limite standard quantistico). Questi risultati non erano però conclusivi, in quanto è stata avanzata l'obiezione [20] [21] che, per dispositivi altamente non lineari, la figura di rumore cessa di essere una quantità significativa per la caratterizzazione dell'amplificatore, e che tale caratterizzazione debba essere invece fatta mediante la bit error rate. Diventa necessario pertanto simulare la bit error rate dell'amplificatore laser saturabile e confrontarla con quella dell'amplificatore lineare: questo è lo scopo principale della presente tesi.

Si dà ora un breve riassunto del contenuto della tesi.

Il primo capitolo è dedicato al richiamo dei concetti che verranno utilizzati e alla definizione delle notazioni. Si introduce brevemente la master equation per sistemi quantistici non isolati e se ne spiega il significato fisico. Viene successivamente ricavata, a partire da questa, l'equazione di Fokker-Planck per sistema generico.

Nel secondo capitolo si ricava l'equazione di Fokker-Planck per il laser utilizzando la teoria di F. Haake dell'espansione di Born adiabatica. Un

paragrafo è dedicato al confronto tra l'equazione di Fokker–Planck di Haake ricavata e quella di Lugiato [2].

Il terzo capitolo contiene le definizioni dei modelli fisici e dei parametri caratteristici (guadagno, bit error rate, figura di rumore) delle reti di comunicazione e degli amplificatori. Si introducono inoltre gli amplificatori ottici lineari. Tra questi viene data particolare enfasi al PIA ideale.

Nel quarto capitolo vengono descritti i due metodi di simulazione usati: la simulazione dell'equazione di Fokker–Planck e il metodo del quantum jump. Vengono dati inoltre gli algoritmi necessari alla valutazione, a partire dalla soluzione dell'equazione di Fokker–Planck, delle quantità fisiche da simulare.

Il quinto, infine, presenta le conclusioni e i risultati della ricerca. Vengono inoltre prospettati gli sviluppi che possono nascere dai risultati ottenuti.

Capitolo 1

Concetti introduttivi

In questo capitolo si introducono le nozioni di base necessarie per sviluppare le teorie che verranno proposte nel presente scritto.

Nella prima sezione si introduce brevemente la descrizione quantistica dei sistemi aperti mediante la master equation [27]. La master equation generalizza l'equazione di Schrödinger, valida solo per sistemi isolati, e determina l'evoluzione della matrice densità del sistema di interesse in interazione con un bagno. La tecnica per derivare la master equation consiste, come si vedrà, nel considerare l'evoluzione dello stato congiunto sistema–bagno “mediato” sui gradi di libertà del bagno.

Nella successiva sezione si introduce l'equazione di Fokker-Planck, che determina l'evoluzione della “quasi-probabilità” corrispondente alla matrice densità. L'equazione di Fokker-Planck è più semplice da integrare della master equation, in quanto gli operatori di campo sono sostituiti con operatori differenziali, e pertanto possono essere utilizzati i metodi usuali di integrazione delle equazioni differenziali. Inoltre, con opportune approssimazioni, l'equazione di Fokker-Planck risulta essere della forma di un'equazione di diffusione, e può essere pertanto integrata con metodi Montecarlo.

1.1 La master equation.

In questo paragrafo si analizza brevemente la descrizione dei sistemi aperti mediante la master equation e si introduce il formalismo liouvilliano.

In meccanica quantistica il sistema isolato è descritto dall'equazione di Schrödinger

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}],$$

dove $\hat{\rho}(t)$ è l'operatore densità tempo-dipendente che descrive lo stato del sistema e \hat{H} è l'hamiltoniana. L'equazione di Schrödinger è però inadeguata per descrivere sistemi “aperti”, quale il laser.

Il modello di laser che si utilizzerà in questo lavoro (vedi paragrafo 2.2) è una cavità ottica Fabry-Perot contenente atomi che interagiscono con la radiazione [2] e [3]. Per sua caratteristica, il laser è intrinsecamente un sistema aperto, in quanto la radiazione elettromagnetica non è confinata nella cavità. Se si volesse fare una descrizione del laser alla Schrödinger, si dovrebbe inglobare nel “sistema laser” anche il campo elettromagnetico all'esterno della cavità, complicandone notevolmente la descrizione. Per questo motivo, è utile trattare separatamente il sistema quantistico costituito dai soli modi di cavità e gli atomi in essa contenuti da una parte, e dall'altra trattare i modi esterni come “bagno”, dove si intende che il bagno sia un sistema *grande*, cioè tale da non essere apprezzabilmente modificato dall'interazione con il sistema di interesse.

Costruzione della master equation:

Si ricava brevemente la master equation per un sistema generico: in seguito si considererà il caso specifico del laser. Si parte dall'equazione Schrödinger in pittura di interazione, sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_r$, prodotto tensore dello spazio di sistema \mathcal{H}_s e di quello di riserva \mathcal{H}_r . La hamiltoniana $\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_r + \hat{H}_{rs}$ è la somma delle hamiltoniane libere di sistema \hat{H}_s e di riserva \hat{H}_r e dell'hamiltoniana \hat{H}_{rs} di interazione tra sistema e riserva. È da notare che \hat{H}_s e \hat{H}_r commutano fra loro in quanto agiscono su spazi di Hilbert distinti.

La matrice densità totale è descritta dall'equazione di Schrödinger

$$\frac{d}{dt}\hat{R}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_{rs}^I(t), \hat{R}(t)], \quad (1.1)$$

dove $\hat{H}_{rs}^I \stackrel{def}{=} e^{+\frac{i}{\hbar}(H_s+H_r)t}\hat{H}_{rs}e^{-\frac{i}{\hbar}(H_s+H_r)t}$ è la hamiltoniana di interazione in pittura di interazione. Nello spirito dell'approssimazione di Born al secondo ordine si integra formalmente la (1.1) e si sostituisce il risultato nell'equazione

stessa, ottenendo così

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{R}(t) &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_{rs}^I(t), \hat{R}(0)] + \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' [\hat{H}_{rs}^I(t), [\hat{H}_{rs}^I(t'), \hat{R}(t')]]. \end{aligned}$$

Tracciando parzialmente ambo i membri sullo spazio di Hilbert \mathcal{H}_r , si ottiene l'equazione che descrive l'evoluzione del solo sistema, individuato dalla matrice densità $\hat{\rho}(t) \stackrel{def}{=} \text{Tr}_r[\hat{R}(t)]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) &= \frac{1}{i\hbar}\text{Tr}_r\left[[\hat{H}_{rs}^I, \hat{R}(0)]\right] + \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' \text{Tr}_r\left[[\hat{H}_{rs}^I(t), [\hat{H}_{rs}^I(t'), \hat{R}(t')]]\right], \end{aligned} \quad (1.2)$$

dove solitamente il primo termine è nullo, o comunque può essere inglobato in una ridefinizione di \hat{H}_s . L'operazione di traccia parziale ha lo scopo di eliminare i gradi di libertà della riserva dal sistema quantistico in studio.

È da notare che finora non è stata fatta alcuna approssimazione e l'equazione (1.2) è esatta. Si introducono ora due differenti approssimazioni:

1. *Approssimazione di Born al secondo ordine:*

Si sfrutta la definizione, data sopra, di sistema aperto. L'interazione tra sistema e riserva non è sufficiente a modificare sostanzialmente lo stato dalla riserva per cui, in prima approssimazione, è possibile definire uno stato di sola riserva $\hat{\rho}_r(t) \simeq \hat{\rho}_r(0)$ tempo indipendente. L'interazione tende a correlare la riserva con il sistema e la matrice densità congiunta sistema–riserva $\hat{r}(t)$ a rigore non è fattorizzata. Comunque, nello spirito di interazione debole in un approccio perturbativo, la correlazione sistema–riserva è infinitesima dello stesso ordine dell'interazione \hat{H}_{rs} , e si otterrà

$$\hat{R}(t) = \hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_r(t) + O(\hat{H}_{rs}) \simeq \hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_r(0).$$

Sostituendo nella (1.2) si ha la master equation in approssimazione di Born:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) \simeq -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_r\left[[\hat{H}_{rs}^I(t), [\hat{H}_{rs}^I(t'), \hat{\rho}(t') \otimes \hat{\rho}_r(0)]]\right]. \quad (1.3)$$

È da notare che la $\hat{\rho}(t)$ dipende dai valori di $\hat{\rho}$ a tutti i tempi precedenti. L'approssimazione di Markoff permette di ovviare a questo inconveniente.

2. *Approssimazione di Markoff*: Si sostituisce $\rho(t')$ con $\rho(t)$ nell'integrale (1.3). Fisicamente, ciò equivale a considerare la scala dei tempi della riserva molto più rapida della scala dei tempi del sistema. La riserva, quindi, tende a modificare il proprio stato, tornando *rapidamente* allo stato di partenza. I piccoli cambiamenti indotti in essa da parte del sistema non fanno a tempo a influenzare nuovamente il sistema, prima di essere assorbiti, quindi lo stato $\hat{\rho}(t)$ del sistema non viene, in prima approssimazione, influenzato dallo stato a tempi precedenti.

Si ottiene così la **master equation in approssimazione Born-Markoff**:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_r \left[[\hat{H}_{rs}^I(t), [\hat{H}_{rs}^I(t'), \hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_r(0)]] \right] \quad (1.4)$$

Formalismo liouwilliano:

Conviene introdurre il formalismo liouwilliano, che permette di scrivere la master equation in maniera più compatta. Lindblad dimostra [24] che una master equation ammissibile (ovvero che preserva la positività e la normalizzazione dell'operatore densità) deve necessariamente avere la forma

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_s, \hat{\rho}] + \sum_m \mathcal{D}[\hat{c}_m]\hat{\rho}, \quad (1.5)$$

dove \hat{H}_s è l'hamiltoniana di sistema e i \hat{c}_m sono generici operatori di sistema. $\mathcal{D}[\hat{c}_m]\bullet$ denota il "superoperatore" (i.e. operatore agente su operatori) di Lindblad:

$$\mathcal{D}[\hat{c}]\hat{O} \stackrel{def}{=} \hat{c}\hat{O}\hat{c}^+ - \frac{1}{2}\{\hat{c}^+\hat{c}, \hat{O}\}_+,$$

dove $\{\dots, \dots\}_+$ indica l'anticommutatore e il simbolo \bullet sostituisce l'operatore generico su cui il superoperatore agisce. Si omette qui la dimostrazione del teorema di Lindblad, nonchè la derivazione della forma esplicita della master equation (1.4) per il caso del laser.

Scrivendo la master equation nella forma

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \mathcal{L}\hat{\rho}(t); \quad \mathcal{L}\bullet \stackrel{def}{=} -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_s, \bullet] + \sum_m \mathcal{D}[\hat{c}_m]\bullet, \quad ,$$

dove \mathcal{L} è detto *superoperatore liouwilliano*, la soluzione formale dell'equazione è

$$\hat{\rho}(t) = e^{\int_0^t d\tau \mathcal{L}(\tau)} \hat{\rho}(0).$$

1.2 Equazione di Fokker-Planck.

In questo capitolo si espone la derivazione dell'equazione di Fokker-Planck e il suo significato fisico.

La master equation introdotta nel paragrafo 1.1 è un'equazione operatoriale, e in quanto tale la sua soluzione è generalmente piuttosto complicata. Convien tradurre la master equation in un'equazione differenziale, la cui soluzione si possa ricondurre alla soluzione $\hat{\rho}(t)$ della master equation. Questa equazione differenziale è detta equazione di Fokker-Planck.

1.2.1 Funzioni di Wigner

Per poter dare una rappresentazione differenziale della master equation bisogna introdurre delle funzioni che rappresentino la matrice densità $\hat{\rho}(t)$. Queste sono le funzioni di Wigner $W(\alpha, \bar{\alpha})$ e le funzioni generatrici dei momenti $X(\lambda, \bar{\lambda})$.

Convien introdurre dapprima la funzione generatrice dei momenti X così definita

$$X(\lambda, \bar{\lambda}, s) \stackrel{def}{=} \langle e^{\lambda \hat{a}^+ - \bar{\lambda} \hat{a} + \frac{s}{2} |\lambda|^2} \rangle \equiv \text{Tr}[\hat{\rho} e^{\lambda \hat{a}^+ - \bar{\lambda} \hat{a} + \frac{s}{2} |\lambda|^2}], \quad (1.6)$$

dove $\hat{\rho}(t)$ è matrice densità del sistema e \hat{a} e \hat{a}^+ sono gli operatori di creazione e distruzione relativi ad un opportuno modo della radiazione elettromagnetica. Il parametro s indica l'ordinamento

$$s = \begin{cases} +1 & \text{normale} \\ 0 & \text{simmetrico} \\ -1 & \text{antinormale} \end{cases} .$$

Nulla vieta comunque di assegnare ad s valori generici, introducendo così nuovi tipi di ordinamento. È possibile dimostrare immediatamente la tabella dei valori di s mediante la formula Campbell-Hausdorff ¹:

$$X(\lambda, \bar{\lambda}, s = +1) = \langle : e^{\lambda a^+ - \bar{\lambda} a} : \rangle \equiv \langle e^{\lambda a^+} e^{-\bar{\lambda} a} \rangle$$

$$X(\lambda, \bar{\lambda}, s = 0) = \langle e^{\lambda \hat{a}^+ - \bar{\lambda} \hat{a}} \rangle$$

$$X(\lambda, \bar{\lambda}, s = -1) = \langle : e^{\lambda a^+ - \bar{\lambda} a} :_A \rangle \equiv \langle e^{-\bar{\lambda} a} e^{\lambda a^+} \rangle,$$

dove $: :$ denota l'ordinamento normale e $: :_A$ quello antinormale.

È semplice ricavare, mediante la definizione (1.6) della X , le seguenti relazioni che permettono di valutare i momenti con ordinamento s a partire dalla X :

ordinamento normale:

$$\langle (\hat{a}^+)^n \hat{a}^m \rangle = (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial \lambda^n \partial \bar{\lambda}^m} X(\lambda, \bar{\lambda}, s = 1) \Big|_{\lambda=0, \bar{\lambda}=0}$$

ordinamento antinormale:

$$\langle \hat{a}^m (\hat{a}^+)^n \rangle = (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial \lambda^n \partial \bar{\lambda}^m} X(\lambda, \bar{\lambda}, s = -1) \Big|_{\lambda=0, \bar{\lambda}=0} \quad (1.7)$$

ordinamento simmetrico:

$$\frac{1}{2} \langle (\hat{a}^+)^n \hat{a}^m + \hat{a}^m (\hat{a}^+)^n \rangle = (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial \lambda^n \partial \bar{\lambda}^m} X(\lambda, \bar{\lambda}, s = 0) \Big|_{\lambda=0, \bar{\lambda}=0},$$

dove si intende che λ e $\bar{\lambda}$ vanno posti uguali a zero dopo aver eseguito la derivazione. Queste relazioni verranno usate per calcolare i momenti della distribuzione nel numero di fotoni nelle simulazioni numeriche (cfr. paragrafo 4.1.3).

Le trasformate di Fourier di X sono le funzioni di quasiprobabilità di Wigner:

$$X(\lambda, \bar{\lambda}, s) \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{C}} d^2 \alpha e^{\lambda \bar{\alpha} - \bar{\lambda} \alpha} W(\alpha, \bar{\alpha}, s)$$

¹ $e^{(\hat{a}+\hat{b})} = e^{\hat{a}} e^{\hat{b}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{a}, \hat{b}]}$ se e solo se \hat{a} e \hat{b} commutano con $[\hat{a}, \hat{b}]$

Esiste una corrispondenza biunivoca fra funzioni di Wigner W e matrice densità $\hat{\rho}(t)$ (²):

$$\hat{\rho} = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^2\lambda}{\pi} \int_{\mathcal{C}} d^2\beta W(\beta, \bar{\beta}, s) e^{\lambda\bar{\beta} - \beta\bar{\lambda}} e^{\bar{\lambda}\hat{a} - \lambda\hat{a}^+ - \frac{s}{2}|\lambda|^2} \quad (1.8)$$

e viceversa:

$$W(\alpha, \bar{\alpha}, s) = \frac{2}{\pi(1-s)} e^{-\frac{2|\alpha|^2}{1-s}} \text{Tr} \left[\left(\frac{s+1}{s-1} \right)^{\hat{a}^+\hat{a}} e^{\frac{2\bar{\alpha}}{1-s}\hat{a}} \hat{\rho} e^{\frac{2\alpha}{1-s}\hat{a}^+} \right],$$

oppure

$$W(\alpha, \bar{\alpha}, s) = \frac{2}{\pi(1-s)} e^{+\frac{2|\alpha|^2}{1+s}} \text{Tr} \left[\left(\frac{s+1}{s-1} \right)^{\hat{a}^+\hat{a}} e^{-\frac{2\alpha}{1+s}\hat{a}^+} \hat{\rho} e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{1+s}\hat{a}} \right]. \quad (1.9)$$

Valgono le seguenti proprietà per la W :

1. Dall'equazione (1.8) e dalla normalizzazione $\text{Tr}[\hat{\rho}] = 1$ segue che le funzioni di Wigner sono normalizzate nel piano complesso:

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} W(\alpha, \bar{\alpha}, s) = 1$$

2. Per $s \leq -1$ W è una funzione definita positiva.
3. Per $s > -1$ aumenta l'irregolarità della W che non sempre esiste come funzione, ma può esistere in senso distribuzionale. Inoltre W non è più definita positiva.

Casi particolari interessanti delle funzioni W sono cosiddette "rappresentazioni" P e Q della matrice densità:

$$W(\alpha, \bar{\alpha}) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \pi P(\alpha, \bar{\alpha}) & s = +1 \\ Q(\alpha, \bar{\alpha}) & s = -1 \end{cases}$$

Per queste due funzioni esiste una semplice relazione con la matrice densità $\hat{\rho}(t)$. Per la funzione Q , detta anche funzione di Husimi, vale la semplice relazione³

²Più avanti si darà la dimostrazione per il caso di ordinamento antinormale.

³Dimostrazione:

$$Q(\alpha, \bar{\alpha}) = W(\alpha, \bar{\alpha}, -1) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^2\lambda}{\pi} X(\lambda, \bar{\lambda}, -1) e^{\alpha\bar{\lambda} - \bar{\alpha}\lambda} = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^2\lambda}{\pi} \text{Tr}[\hat{\rho} e^{-\bar{\lambda}\hat{a}} e^{\lambda\hat{a}^+}] e^{\alpha\bar{\lambda} - \bar{\alpha}\lambda} =$$

$$Q(\alpha, \bar{\alpha}) = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle, \quad (1.10)$$

dove $|\alpha\rangle$ con $\alpha \in \mathcal{C}$ denotano stati coerenti. Dall'equazione (1.10) discende in maniera ovvia che $Q(\alpha, \bar{\alpha}) > 0$, essendo $\hat{\rho}$ un operatore positivo.

La funzione P vale invece la relazione

$$\hat{\rho} = \int_{\mathcal{C}} d^2\alpha P(\alpha, \bar{\alpha}) |\alpha\rangle \langle \alpha|.$$

Come già detto la funzione P non è generalmente definita positiva.

È semplice mostrare che le funzioni P e Q sono le funzioni generatrici rispettivamente dei momenti normalmente e antinormalmente ordinati, ovvero

$$\begin{aligned} \langle (a^+)^n a^m \rangle &= \int_{\mathcal{C}} d^2\alpha P(\alpha, \bar{\alpha}) \bar{\alpha}^n \alpha^m \\ \langle a^n (a^+)^m \rangle &= \int_{\mathcal{C}} \frac{d^2\alpha}{\pi} Q(\alpha, \bar{\alpha}) \alpha^n \bar{\alpha}^m \end{aligned}$$

1.2.2 Rappresentazione differenziale

Funzioni di Wigner per generico operatore: La rappresentazione data della matrice densità nel paragrafo 1.2.1 si può estendere in maniera ovvia ad un generico operatore \hat{O} , dato che non è stata utilizzata alcuna proprietà caratteristica della $\hat{\rho}(t)$. A tale scopo si definisce la funzione generatrice generalizzata

$$X(\lambda, \bar{\lambda}, s; \hat{O}) \stackrel{def}{=} \text{Tr}[\hat{O} e^{\lambda \hat{a}^+ - \bar{\lambda} \hat{a} + \frac{s}{2} |\lambda|^2}]$$

Le trasformate di Fourier delle funzioni $X(\lambda, \bar{\lambda}, s; \hat{O})$ sono funzioni di Wigner generalizzate che permettono rappresentazioni differenziali degli operatori di campo.

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{C}} \frac{d^2\beta}{\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{d^2\lambda}{\pi} \langle \beta | e^{\lambda a^+} \hat{\rho} e^{-\bar{\lambda} a} | \beta \rangle e^{\alpha \bar{\lambda} - \bar{\alpha} \lambda} = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^2\beta}{\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{d^2\lambda}{\pi} \langle \beta | \hat{\rho} | \beta \rangle e^{\lambda(\bar{\beta} - \bar{\alpha})} e^{-\bar{\lambda}(\beta - \alpha)} = \\ &= \int_{\mathcal{C}} d^2\beta \langle \beta | \hat{\rho} | \beta \rangle \delta^{(2)}(\alpha - \beta) = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle \end{aligned}$$

A titolo di esempio si ricava dall'equazione (1.9) la rappresentazione differenziale associata all'operatore $\hat{a}\bullet$ (moltiplicazione a sinistra per \hat{a} ⁽⁴⁾):

$$W(\alpha, \bar{\alpha}, s; \hat{a}\hat{\rho}) = \frac{1}{2}(1-s)e^{-\frac{2}{1-s}|\alpha|^2} \partial_{\bar{\alpha}} e^{+\frac{2}{1-s}|\alpha|^2} W(\alpha, \bar{\alpha}, s; \hat{\rho}),$$

che si può anche scrivere come

$$W(\alpha, \bar{\alpha}, s; \hat{a}\hat{\rho}) = \left[\alpha + \frac{1}{2}(1-s)\partial_{\bar{\alpha}} \right] W(\alpha, \bar{\alpha}, s; \hat{\rho})$$

È del tutto analogo il caso dei superoperatori $\bullet\hat{a}$, $\hat{a}^+\bullet$, etc.

La tavola 1.1 (presa da [15]) contiene le rappresentazioni differenziali che serviranno per ricavare l'equazione di Fokker-Planck del laser. È da notare che, come ci si aspetta, la rappresentazione degli operatori applicati a sinistra commuta con quella degli operatori applicati a destra (i.e. il superoperatore $\bullet\hat{a}$ commuta con i superoperatori $\hat{a}\bullet, \hat{a}^+\bullet$ etc.)

1.2.3 Metodo per dedurre l'equazione di Fokker-Planck

Utilizzando la rappresentazione differenziale e le funzioni di Wigner introdotte nei paragrafi precedenti si può ora trasformare la master equation (data nel par 1.1) in equazione di Fokker-Planck. Si passa così da un'equazione operatoriale ad un'equazione differenziale.

Il metodo utilizzato è semplicemente quello di calcolare la funzione di Wigner di tutti i termini della master equation, cioè a partire da:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = \mathcal{L}\hat{\rho}(t),$$

si vuole ottenere la

$$\frac{\partial}{\partial t} W(\alpha, \bar{\alpha}, s; \hat{\rho}) = W(\alpha, \bar{\alpha}, s; \mathcal{L}\hat{\rho})$$

⁴È da notare che in genere la rappresentazione differenziale dell'operatore $\hat{O}\hat{\rho}$ sarà diversa da quella dell'operatore $\hat{\rho}\hat{O}$, quindi è necessario indicare sempre in che punto va applicata la $\hat{\rho}$. Nel seguito lo si indicherà con un pallino \bullet nella posizione opportuna. In quest'ottica le espressioni del tipo $\bullet\hat{a}$, $\hat{a}^+\bullet\dots$ possono essere viste come superoperatori, in quanto vanno applicate a degli operatori (in questo caso all'operatore $\hat{\rho}$)

Tavola 1.1:

OPERATORE	RAPPRESENTAZIONE
aO	$\alpha - \frac{1}{2}(s-1)\partial\bar{\alpha}$
Oa	$\alpha - \frac{1}{2}(s+1)\partial\bar{\alpha}$
a^+O	$\bar{\alpha} - \frac{1}{2}(s+1)\partial\alpha$
Oa^+	$\bar{\alpha} - \frac{1}{2}(s-1)\partial\alpha$

Per il laser interessa particolarmente il caso in cui lo liouvilliano \mathcal{L} contenga solamente operatori di campo. In questo caso, utilizzando la rappresentazione differenziale degli operatori di campo, data nel par 1.2.2, si ottiene un'equazione differenziale nell'incognita $W(\alpha, \bar{\alpha}, s; \hat{\rho})$, dopo aver tradotto il superoperatore liouvilliano \mathcal{L} in un operatore differenziale $\mathcal{F}(\alpha, \bar{\alpha}, \partial\alpha, \partial\bar{\alpha}, s)$.

$$\frac{\partial}{\partial t}W(\alpha, \bar{\alpha}, s; \hat{\rho}) = \mathcal{F}(\alpha, \bar{\alpha}, \partial\alpha, \partial\bar{\alpha}, s)W(\alpha, \bar{\alpha}, s; \hat{\rho})$$

Nel caso in cui \mathcal{F} contenga derivate al più di secondo ordine, in genere si dà una forma vettoriale per l'equazione di Fokker-Planck, ponendo

$$\mathcal{F}(\alpha, \bar{\alpha}, \partial\alpha, \partial\bar{\alpha}) \stackrel{def}{=} \vec{\nabla}_{\bar{\alpha}} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}_{\bar{\alpha}} : \vec{A}, \quad (1.11)$$

dove \vec{D} è detto *vettore di drift* e \vec{A} *matrice simmetrica di diffusione* e dove

$$\vec{\nabla}_{\bar{\alpha}} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \partial_{\alpha} \\ \partial_{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}; \quad \vec{\nabla}_{\bar{\alpha}} \stackrel{def}{=} \vec{\nabla}_{\bar{\alpha}} \vec{\nabla}_{\bar{\alpha}}$$

La simmetria di \vec{A} è conseguenza della simmetria della matrice operatoriale $\vec{\nabla}_{\vec{\alpha}}$.

Le funzioni di Wigner introdotte in questo capitolo e quelle che si utilizzeranno nel corso della presente tesi sono definite sul piano complesso \mathcal{C} . È, però, possibile fare un'estensione a spazi a d dimensioni \mathfrak{R}^d . In questo caso la W è funzione di $\vec{u} \in \mathfrak{R}^d$ e il vettore di drift e la matrice di diffusione sono definiti rispettivamente su \mathfrak{R}^d e $\mathfrak{R}^d \otimes \mathfrak{R}^d$.

Dalla soluzione $W(\alpha, \bar{\alpha}, s; \hat{\rho})$ dell'equazione differenziale alle derivate parziali (1.11) si può ottenere l'operatore densità $\hat{\rho}(t)$, soluzione della master equation usando la (1.8).

Capitolo 2

Espansione adiabatica per il laser a singolo modo.

In questo capitolo si espone la teoria di Fritz Haake e Maciej Lewenstein [3] per il laser saturabile a modo singolo. Si parte dalla master equation di atomi a due livelli con inversione di popolazione assegnata, in interazione con un modo della radiazione in cavità. Si ottiene, mediante espansione adiabatica, l'equazione di Fokker-Planck per un laser. I meccanismi di decadimento e di pompaggio degli atomi sono descritti in maniera fenomenologica.

Rispetto ad altre teorie -come ad esempio quella di Lugiato *et al.* [2]- la teoria di F. Haake utilizza un metodo di eliminazione adiabatica delle variabili atomiche semplice e sistematico. Le due teorie, e le relative equazioni di Fokker Planck, saranno discusse alla fine di questo capitolo.

Nella prima sezione del capitolo si ricava una espansione perturbativa di Born per una generica master equation, al fine di eliminare adiabaticamente le variabili “veloci” (atomiche) e ottenere un'equazione di evoluzione che descriva solamente le variabili di interesse (il campo in cavità). Successivamente si applicherà questa teoria al laser, a partire dalla master equation per il laser a singolo modo. Si otterrà così, nella terza sezione, l'equazione di Fokker Planck per il laser che verrà utilizzata nelle simulazioni. Infine si confronta la teoria sviluppata nel presente capitolo con la teoria di L. Lugiato *et al.* [2]. L'ultima sezione contiene la soluzione analitica dell'equazione di Fokker-Planck per il caso stazionario.

2.1 Espansione di Born adiabatica della master equation

In questo paragrafo si analizza l'espansione di Born di una generica master equation, con eliminazione adiabatica delle variabili veloci. La presente trattazione è il risultato di una rielaborazione e generalizzazione del metodo alla base della teoria di F. Haake *et al.* L'espansione è detta adiabatica in quanto l'ordine zero rappresenta il raggiungimento dell'equilibrio delle variabili veloci che inseguono le variabili lente. Nel caso specifico del laser, che verrà trattato solo in un secondo tempo, le variabili veloci sono quelle atomiche, mentre le variabili lente sono quelle di radiazione.

La dinamica del sistema in studio è descritta mediante una master equation dalla forma generale

$$\frac{d}{dt}\hat{R}(t) = L\hat{R}(t), \quad (2.1)$$

dove L è lo liouvilliano e $\hat{R}(t)$ la matrice densità che descrive lo stato del sistema. La soluzione formale della (2.1) è

$$\hat{R}(t) = G(t)\hat{R}(0),$$

dove

$$G(t) = e^{\int_0^t d\tau L(\tau)}$$

denota il “superoperatore di Green” della master equation .

Si introducono ora alcune ipotesi fondamentali, che individuano i limiti di validità della presente teoria.

1. Si scompone lo liouvilliano in somma di due parti, $L = L_0 + \Delta L$.

La parte di ordine zero, L_0 , descrive la dinamica delle “variabili veloci” mediante la master equation

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_0(t) = L_0\hat{\rho}_0(t), \quad (2.2)$$

dove $\hat{\rho}_0$ è l'operatore densità sullo spazio di Hilbert \mathcal{H}_0 dei gradi di libertà veloci. L'equazione (2.2) è risolvibile analiticamente.

La parte di Liouvilliano ΔL descrive la dinamica dei gradi di libertà lenti e l'interazione con le variabili veloci. La matrice densità $\hat{R}(t)$, introdotta precedentemente, individua pertanto lo stato di entrambi i tipi di variabili lente e veloci. $\hat{R}(t)$ agisce quindi su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , estensione di \mathcal{H}_0 .

Nel laser, come già accennato, i gradi di libertà veloci (che saranno eliminati usando la approssimazione adiabatica) sono quelli atomici, mentre quelli lenti sono i gradi di libertà della radiazione in cavità.

2. Lo liouvilliano L_0 di ordine zero conduce le variabili veloci all'equilibrio con quelle lente. Questo avviene in un tempo “breve” t_* di rilassamento¹. In termini di matrice densità congiunta ciò si traduce nel fatto che un qualunque stato $\hat{R}(0)$ evolve, dopo un tempo t_* , in uno stato \hat{R}_* “stazionario adiabatico”, ovvero stazionario rispetto a L_0 , si ha cioè $L_0\hat{R}_* = 0$.

La definizione del tempo t_* è quindi

$$\forall t \gg t_* \quad e^{L_0 t} \hat{R}(0) = \hat{R}_*, \text{ dove } L_0 \hat{R}_* = 0.$$

In altri termini \hat{R}_* è lo stato “stazionario adiabatico” all'ordine zero.

Significato fisico di t_ :*

Il t_* è il tempo impiegato dalle variabili veloci per andare in equilibrio con quelle lente. Lo spirito dell'**approssimazione adiabatica** consiste nel considerare la dinamica su una scala dei tempi più lenta di t_* e quindi **supporre t_* trascurabile**.

3. Si sceglie lo stato iniziale in modo tale che la $\hat{\rho}(0) \stackrel{def}{=} \text{Tr}_0[\hat{R}(0)]$ sia invertibile. Questa ipotesi non è restrittiva in quanto lo stato iniziale è irrilevante ai fini della teoria.

¹Ad esempio questo è il caso della teoria esposta nel paragrafo 2.3, dove $L_0 \stackrel{def}{=} L_a + g[\alpha\hat{S}_+ - \bar{\alpha}\hat{S}_-, \bullet]$ descrive gli atomi in interazione con una radiazione classica. Lo stato “stazionario adiabatico” (individuato da $L_0\hat{R}_* = 0$) viene raggiunto dopo un tempo $t_* \gg \frac{1}{\gamma_{\parallel}}, \frac{1}{\gamma_{\perp}}$.

Espansione di Born:

Integrando la master equation (2.1) si ottiene

$$\begin{aligned} R(t) &= e^{L_0 t} R(0) + \int_0^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L R(\tau) = \\ &= e^{L_0 t} R(0) + \int_0^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L\tau} R(0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove si è utilizzata la soluzione formale della master equation, $R(\tau) = e^{L\tau} R(0)$. Inserendo il risultato (2.3) nella master equation (2.1), si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R(t) &= (L_0 + \Delta L) R(t) = L_0 e^{L_0 t} R(0) + \Delta L e^{L_0 t} R(0) + \\ &+ L_0 \int_0^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L\tau} R(0) + \Delta L \int_0^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L\tau} R(0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'ultima identità diventa un'approssimazione di Born al second'ordine se, negli esponenziali a secondo membro si sostituisce L con L_0 . Allo scopo di semplificare l'espressione ottenuta conviene dividere in due parti il primo integrale, come segue

$$\begin{aligned} L_0 \int_0^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L_0\tau} \hat{R}(0) &= L_0 \int_0^{t_*} d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L_0\tau} \hat{R}(0) + \\ &+ L_0 \int_{t_*}^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L_0\tau} \hat{R}(0) = \\ &= L_0 \int_{t-t_*}^t d\tau' e^{L_0\tau'} \Delta L e^{L_0(t-\tau')} \hat{R}(0) + L_0 \int_{t_*}^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L_0\tau} \hat{R}(0). \end{aligned}$$

Usando l'ipotesi $t \gg t_*$ si può sostituire $t - \tau' \simeq t$ per $t_* \ll t$ nel primo integrale e sostituire $e^{L_0\tau} \hat{R}(0) \simeq \hat{R}_* \simeq e^{L_0 t} \hat{R}(0)$ per $\tau > t_*$ nel secondo integrale, trovando

$$\begin{aligned} L_0 \int_{t-t_*}^t d\tau' e^{L_0\tau'} \Delta L e^{L_0(t-\tau')} \hat{R}(0) &+ L_0 \int_{t_*}^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L_0\tau} \hat{R}(0) \simeq \\ \simeq L_0 \int_{t-t_*}^t d\tau' e^{L_0\tau'} \Delta L e^{L_0 t} \hat{R}(0) &+ L_0 \int_{t_*}^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L_0 t} \hat{R}(0) = \end{aligned}$$

$$= L_0 \int_0^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L_0\tau} \hat{R}(0) = e^{L_0t} \Delta L e^{L_0t} \hat{R}(0) - \Delta L e^{L_0t} \hat{R}(0).$$

Mediante identico procedimento eseguito sul secondo integrale dell'equazione (2.4) si può ottenere

$$\Delta L \int_0^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L_0\tau} R(0) \simeq \Delta L \int_0^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L_0\tau} \hat{R}(0).$$

Si ottiene quindi una master equation per la matrice densità globale $\hat{R}(t)$, con approssimazione al secondo ordine nei parametri di piccolezza di ΔL :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R(t) &= L_0 e^{L_0t} \hat{R}(0) + e^{L_0t} \Delta L e^{L_0t} R(0) + \\ &+ \Delta L \int_0^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L_0\tau} \hat{R}(0), \end{aligned} \quad (2.5)$$

La formula ottenuta è valida per una scala di tempi $t \gg t_*$ ⁽²⁾, tempo necessario perchè si raggiunga lo stato “stazionario adiabatico” \hat{R}_* della matrice densità. Fisicamente si richiede che sia trascorso il tempo necessario perchè le variabili veloci siano andate a regime con quelle lente.

Master equation per la matrice densità parziale:

Si ottiene, tracciando ambo i membri di (2.5), la master equation che descrive l'evoluzione della matrice densità **per le sole variabili lente**, cioè $\hat{\rho}(t) \stackrel{def}{=} \text{Tr}_0 \hat{R}(t)$, dove Tr_0 indica la traccia parziale sulla spazio di Hilbert \mathcal{H}_0 dei gradi di libertà veloci:

$$\hat{\rho}(t) = \text{Tr}_0 [G(t) \hat{R}(0)].$$

Per ottenere il superoperatore di Green per la sola radiazione conviene moltiplicare a destra per $\hat{\rho}^{-1}(0) \hat{\rho}(0) = 1$ (l'operatore è invertibile grazie alla terza delle ipotesi introdotte all'inizio del paragrafo). Si ha ³:

$$\hat{\rho}(t) = \text{Tr}_0 [G(t) \hat{R}(0) \hat{\rho}^{-1}(0)] \hat{\rho}(0) \stackrel{def}{=} \mathcal{G}(t) \hat{\rho}(0)$$

²Usando questa condizione la master equation ottenuta si potrebbe anche scrivere

$$\frac{d}{dt} R(t) = e^{L_0t} \Delta L \hat{R}_* + \Delta L \int_0^t d\tau e^{L_0(t-\tau)} \Delta L \hat{R}_*.$$

³ $\hat{\rho}$ è indipendente dagli atomi e si può inglobare nella traccia sullo spazio atomico.

A partire dal $\mathcal{G}(t)$ si può facilmente ottenere lo liouvilliano di sola radiazione:

$$L(t) \equiv \left(\frac{d}{dt} e^{\int_0^t d\tau L(\tau)} \right) e^{-\int_0^t d\tau L(\tau)} = \dot{\mathcal{G}}(t) \mathcal{G}^{-1}(t)$$

Uno sviluppo in serie di L si ottiene dagli sviluppi in serie di $\mathcal{G}(t)$ e $\mathcal{G}^{-1}(t)$, rispetto al parametro di piccolezza di ΔL :

$$\mathcal{G}(t) \simeq \mathcal{G}^{(0)}(t) + \mathcal{G}^{(1)}(t) + \mathcal{G}^{(2)}(t),$$

dove a partire dalla sua definizione si dimostra⁴ che $\mathcal{G}^{(0)}(t)$ è uguale all'identità \hat{I} . D'altra parte per il \mathcal{G}^{-1} vale lo sviluppo

$$\mathcal{G}^{-1}(t) \simeq \hat{I} - \mathcal{G}^{(1)}(t) - \mathcal{G}^{(2)}(t) + \mathcal{G}^{(1)}(t)\mathcal{G}^{(1)}(t),$$

che si verifica immediatamente a posteriori.

Ora si può ricavare $L \simeq (\dot{\mathcal{G}}^{(1)} + \dot{\mathcal{G}}^{(2)})(\hat{I} - \mathcal{G}^{(1)} - \mathcal{G}^{(2)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)})$, da cui si ricavano i primi due ordini di L :

1. *Ordine zero*: Come ci si aspetta

$$L^{(0)} = 0,$$

cioè $\dot{\rho}(t) = 0$. All'ordine 0 la radiazione è stazionaria.

2. *Primo ordine* :

$$L^{(1)}(t)\rho(0) = \dot{\mathcal{G}}^{(1)}(t)\rho(0) = (\text{Tr}_0[\frac{d}{dt}R(t)])^{(1)} = \text{Tr}_0[e^{L_0 t} \Delta L e^{L_0 t} R(0)],$$

Applicando ora la proprietà $\text{Tr}[e^{L t} \hat{O}] = \text{Tr}[\hat{O}]$ per $\forall \hat{O}, \forall t$ (si può dimostrare osservando che lo liouvilliano duale lascia invariata la traccia), si può eliminare il primo esponenziale:

$$L^{(1)}(t) = \text{Tr}_0[\Delta L e^{L_0 t} \hat{R}(0) \rho^{-1}(0)].$$

⁴Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(0)}(t) &\stackrel{def}{=} \text{Tr}_0[(e^{(L_0 + \Delta L)t} \hat{R}(0) \rho^{-1}(0))^{(0)}] = \text{Tr}_0[e^{L_0 t} \hat{R}(0) \hat{\rho}^{-1}(0)] = \\ &= \text{Tr}_0[\hat{R}(0)] \hat{\rho}^{-1}(0) = \dot{\rho}(0) \hat{\rho}^{-1}(0) = \hat{I} \end{aligned}$$

Tutta la teoria è stata sviluppata per tempi $t \gg t_*$, per cui si può sostituire $e^{L_0 t} \hat{R}(0)$ con \hat{R}_* . Il t_* è quindi il tempo a cui si effettua la traccia sulle variabili veloci, detto anche **tempo di traccia**, è il tempo **minimo** al quale si può tracciare sui gradi di libertà veloci mantenendo valida l'approssimazione adiabatica.

Per gli sviluppi successivi è conveniente utilizzare come stato di *equilibrio adiabatico*, al posto di \hat{R}_* , lo stato $\hat{A} \stackrel{def}{=} \hat{R}_* \hat{\rho}^{-1}(0)$. Esso ancora soddisfa a $L_0 \hat{A} = 0$ (dato che L_0 non agisce sulla radiazione), ma ha traccia parziale unitaria (infatti L_0 non fa evolvere la radiazione, per cui $\text{Tr}_0 \hat{R}_* = \hat{\rho}(0)$). Si ottiene così la parte di liouvilliano al primo ordine:

$$L^{(1)}(t) = \text{Tr}_0[\Delta L \hat{A}] \stackrel{def}{=} \langle \Delta L \rangle_0, \quad (2.6)$$

dove $\langle \dots \rangle_0 \stackrel{def}{=} \text{Tr}_0[\dots \hat{A}]$. È da notare che la traccia parziale $\langle \hat{O} \rangle_0 = \text{Tr}[\hat{O} \hat{A}]$ non è un c-numero, bensì un operatore.

3. Second'ordine:

$$L^{(2)}(t)\rho(0) = (\dot{\mathcal{G}}^{(2)}(t) - \dot{\mathcal{G}}^{(1)}(t)\mathcal{G}^{(1)}(t))\rho(0).$$

Usando la parte al secondo ordine dell'equazione (2.5) e utilizzando $\mathcal{G}^{(1)}(t) = \int_0^t d\tau \dot{\mathcal{G}}^{(1)}(\tau)$ ⁽⁵⁾, si ottiene

$$\begin{aligned} L^{(2)}(t)\rho(0) &= \text{Tr}_0 \left[\int_0^t d\tau \Delta L e^{L_0(t-\tau)} \Delta L e^{L_0 \tau} \hat{R}(0) \right] + \\ &\quad - \text{Tr}_0[\Delta L \hat{A}] \text{Tr}_0 \left[\int_0^t d\tau \Delta L \hat{A} \right] = \\ &= \left[\text{Tr}_0 \int_0^t d\tau' \Delta L (e^{L_0 \tau'} - \hat{A} \text{Tr}_0) \Delta L \hat{A} \right] \stackrel{def}{=} \int_0^t d\tau \langle \Delta L(\tau) \Delta L(0) \rangle_0, \quad (2.7) \end{aligned}$$

dove si è introdotta la notazione $\Delta L(\tau) \stackrel{def}{=} \Delta L e^{L_0 \tau}$.

Conclusioni:

In questo paragrafo ho ottenuto uno sviluppo in serie al second'ordine dello Liouvilliano di sole variabili lente, necessario per far evolvere **solo** la

⁵ $\mathcal{G}(0) = \hat{I}$, ma $\mathcal{G}^{(0)} = \hat{I} \forall t$, quindi $\mathcal{G}^{(1)}(0) = 0$.

$\hat{\rho}(t)$, la traccia parziale sullo spazio \mathcal{H}_0 della matrice densità. La master equation di sola radiazione risultante è

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \left[\langle \Delta L \rangle_0 + \int_0^t d\tau \langle \Delta L(\tau) \Delta L(0) \rangle_0 \right] \hat{\rho}(t).$$

Il vantaggio della presente trattazione rispetto a quella di F. Haake [3] consiste nell'evitare di inserire il limite per $t \rightarrow \infty$ (equazione (3.6) di [3]), per l'eliminazione delle variabili veloci. Tale limite, infatti, porta ad un'incoerenza logica, che consiste nel far tendere $t \rightarrow \infty$ nello liouvilliano, e tuttavia considerare la master equation a tempi finiti, cioè $\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = L(t \rightarrow \infty)\hat{\rho}(t)$. Nella presente trattazione, tale limite è stato sostituito con la condizione $t \gg t_*$, per cui la master equation $\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = L(t)\hat{\rho}(t)$ che si otterrà sarà valida solo a tempi più grandi di t_* .

2.2 Modello di laser

In questo paragrafo si definisce un modello per il laser e si costruisce la master equation che ne regola il funzionamento.

Il modello di laser che verrà utilizzato è composto di due elementi: la cavità ottica e gli atomi del mezzo attivo contenuti in essa. La cavità ottica Fabry-Perot è una porzione di spazio delimitata da specchi. Di questi almeno uno è semitrasparente, cioè può essere attraversato parzialmente dalla radiazione incidente. Questo è necessario affinché la radiazione possa utilmente uscire dal sistema. Gli atomi del mezzo attivo interagiscono con la radiazione presente in cavità. In presenza di inversione di popolazione, l'interazione porta ad una amplificazione della radiazione, e si dice che il sistema "lasera". Oltre che con il modo laser della radiazione, gli atomi interagiscono con due bagni markoffiani: gli altri modi della cavità e la riserva di energia (il pompaggio). Il primo bagno determina una perdita, mentre il secondo è necessario per il bilancio energetico.

Si introducono ora le ipotesi fondamentali che definiscono i limiti di validità della teoria.

1. Gli atomi in numero N sono schematizzati come sistemi a due livelli, (i livelli che laserano). Gli atomi sono pertanto descritti come spin $\frac{1}{2}$, e quindi gli operatori che agiscono sugli atomi sono genericamente combinazioni lineari degli operatori di Pauli:

$$\hat{I} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_+ \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_- \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Gli atomi sono considerati scorrelati fra loro. Questa ipotesi limita la teoria alla descrizione di un mezzo attivo gassoso, in cui le interazioni fra atomi sono trascurabili.
3. Il pompaggio è trattato come un bagno markoffiano.
4. Si utilizza l'approssimazione adiabatica: gli atomi rilassano “velocemente” ed inseguono la radiazione, rimanendo in equilibrio con essa.
5. L'interazione tra atomo e radiazione è di dipolo elettrico in approssimazione di onda rotante.

Lo liouvilliano del laser:

Lo liouvilliano che descrive il laser è la somma dello liouvilliano L_f del modo della radiazione che lasera in cavità, dello liouvilliano L_a degli atomi ed infine dello liouvilliano di interazione atomo–radiazione L_{af} .

$$L = L_a + L_f + L_{af}, \tag{2.8}$$

Sulla base delle ipotesi introdotte, si dà ora la forma esplicita degli liouvilliani.

In base all'ipotesi di non correlazione degli atomi si ha:

$$L_a = \sum_{j=1}^N L_j,$$

cioè lo liouvilliano atomico è somma degli liouvilliani di singolo atomo, senza termini di interazione atomo-atomo. Come liouvilliano di atomo singolo si utilizza la *forma canonica dell'equazione di Bloch*:

$$L_j = \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 + \sigma_0)\mathcal{D}[\hat{\sigma}_{+j}] + \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 - \sigma_0)\mathcal{D}[\hat{\sigma}_{-j}] + \frac{1}{4}\left(\gamma_{\perp} - \frac{\gamma_{\parallel}}{2}\right)\mathcal{D}[\hat{\sigma}_{zj}],$$

dove il σ_0 è il valore di aspettazione stazionario per $t \rightarrow \infty$ dell'inversione di popolazione $\langle \sigma_z \rangle$ non saturata (ovvero in assenza di campo), il γ_{\perp} è il rate di decadimento della polarizzazione atomica, e il γ_{\parallel} è il rate di decadimento dell'inversione di popolazione.

Lo liouvilliano di un modo della radiazione e una cavità con perdita è

$$L_f = \gamma n_{th}\mathcal{D}[\hat{a}^+] + \gamma(n_{th} + 1)\mathcal{D}[\hat{a}],$$

dove \hat{a} e \hat{a}^+ sono gli operatori di distruzione e di creazione del modo del campo che lasera, γ è il rate di decadimento della cavità (o vita media del fotone in cavità), e n_{th} è il numero di fotoni termici in cavità. È da notare che, per il laser, il numero medio di fotoni termici è in genere trascurabile rispetto al numero di fotoni del modo che lasera. In seguito, pertanto, si tratterà solamente il caso $n_{th} = 0$.

Infine, lo liouvilliano di interazione atomo-radiazione nell'approssimazione di dipolo elettrico e onda rotante è

$$L_{af} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_{ED}, \bullet] = g[\hat{S}_+\hat{a} - \hat{S}_-\hat{a}^+, \bullet],$$

dove $\hat{S}_+ \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_{+j}$ e $g^2 = \frac{e^2\omega}{2\epsilon_0\hbar V}(\vec{\epsilon} \cdot \vec{D}_{12})^2$, [e carica dell'elettrone, ω frequenza di transizione atomica (in approssimazione di onda rotante si considera solo il caso risonante, pertanto ω coincide anche con la frequenza del modo che lasera), V volume della cavità, $\vec{\epsilon}$ versore di polarizzazione della radiazione \vec{D}_{12} il momento di dipolo elettrico atomico]. Lo liouvilliano di interazione deriva ovviamente dall'hamiltoniana di interazione, $\hat{H}_{ED} = i\hbar g(\hat{S}_+\hat{a} - \hat{S}_-\hat{a}^+)$, che descrive l'accoppiamento del campo elettrico $\vec{E}_j = i\left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}\vec{\epsilon}(\hat{a}e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R}_j - \omega t)} - h.c.)$ al sito atomico \vec{R}_j con il dipolo elettrico atomico $e\vec{D}_{12}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-)$, in approssimazione di onda rotante.

È da notare che le fasi atomiche $e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_j}$ possono essere inglobate nella definizione degli operatori di Pauli ($\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_-$, infatti, sono definiti a meno di una fase globale, che coincide con la fase arbitraria delle funzioni d'onda descriventi i due livelli atomici).

In conclusione, la master equation che descrive la dinamica del laser a N atomi modellizzato in questo paragrafo è

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = & g[\hat{S}_+\hat{a} - \hat{S}_-\hat{a}^+, \hat{\rho}(t)] + \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 + \sigma_0)\mathcal{D}[\hat{\sigma}_{+j}] + \right. \\ & + \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 - \sigma_0)\mathcal{D}[\hat{\sigma}_{-j}] + \frac{1}{4}\left(\gamma_{\perp} - \frac{\gamma_{\parallel}}{2}\right)\mathcal{D}[\hat{\sigma}_{zj}] + \\ & \left. + \gamma n_{th}\mathcal{D}[\hat{a}^+] + \gamma(n_{th} + 1)\mathcal{D}[\hat{a}] \right\} \hat{\rho}(t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove i vari parametri sono stati tutti definiti nella presente sezione.

2.3 Equazione di Fokker-Planck per il laser

In questo paragrafo si ricava l'equazione di Fokker-Planck a partire dalla master equation definita dallo liouvilliano (2.8). Si utilizza la teoria della rappresentazione differenziale discussa nel paragrafo 1.2.2 . È conveniente ricondursi alla rappresentazione differenziale per i soli operatori bosonici \hat{a} e \hat{a}^+ , lasciando inalterati gli operatori atomici $\hat{\sigma}_-$, $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_z$. Bisogna, pertanto, modificare la teoria precedentemente presentata, sostituendo la traccia nella definizione (1.6) della funzione generatrice dei momenti $X(\lambda, \bar{\lambda})$ con la traccia parziale Tr_f sulle sole variabili di campo:

$$\hat{X}(\lambda, \bar{\lambda}) \stackrel{def}{=} \text{Tr}_f[\hat{R}(t)e^{\lambda\hat{a}^+ - \bar{\lambda}\hat{a} + \frac{\gamma}{2}|\lambda|^2}].$$

È da notare che, a causa della presenza della traccia parziale, la \hat{X} non è una funzione complessa, bensì un operatore atomico. Altrettanto dicasi per la funzione di Wigner W

$$\hat{W}(\alpha, \bar{\alpha}) \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{C}} \frac{d^2\lambda}{\pi^2} e^{\alpha\bar{\lambda} - \bar{\alpha}\lambda + \frac{\gamma}{2}|\lambda|^2} \text{Tr}_f[\hat{R}(t)e^{\lambda\hat{a}^+ - \bar{\lambda}\hat{a}}].$$

Usando la tabella del paragrafo 1.2.2 per tradurre gli operatori $\hat{a}\bullet$, $\bullet\hat{a}$, $\hat{a}^+\bullet$ e $\bullet\hat{a}^+$, si ricavano immediatamente le seguenti rappresentazioni differenziali degli liouvilliani (ovviamente non c'è modificazione dello liouvilliano atomico):

$$L_f = \frac{\gamma}{2} \{ \partial_\alpha \alpha + \partial_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + [2(n_{th} + 1) - (s + 1)] \partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 \}$$

$$L_{af} = g[\alpha \hat{S}_+ - \bar{\alpha} \hat{S}_-, \bullet] +$$

$$+ g \partial_\alpha \left[-\frac{s-1}{2} \bullet \hat{S}_- + \frac{s+1}{2} \hat{S}_- \bullet \right] + g \partial_{\bar{\alpha}} \left[-\frac{s-1}{2} \hat{S}_+ \bullet + \frac{s+1}{2} \bullet \hat{S}_+ \right].$$

Il pallino \bullet indica il luogo in cui vanno applicati gli operatori su cui lo liouvilliano agisce.

Approssimazione di Born della master equation:

Una volta tradotti gli liouvilliani, si può costruire l'equazione di Fokker-Planck usando lo sviluppo di Born adiabatico della master equation trattato nel paragrafo 2.1. È pertanto necessario selezionare all'interno dello liouvilliano L (2.8) l'ordine zero L_0 e il ΔL , in modo che siano soddisfatte le ipotesi alla base della teoria.

Nel caso in esame la scelta degli liouvilliani è la seguente:

$$L_0 \stackrel{def}{=} L_a - g[\alpha \hat{S}_+ - \bar{\alpha} \hat{S}_-, \bullet]$$

L'ordine zero descrive gli atomi in presenza dei meccanismi di pompaggio e di perdita, in interazione con una radiazione con radiazione classica di ampiezza fissata α . Si inseriscono, cioè, in L_0 le parti di L_{af} che sono proporzionali all'ampiezza del campo in modo che già all'ordine zero si manifestino gli effetti della saturazione, quando l'ampiezza α del campo è paragonabile con il numero di fotoni di saturazione $n_s \stackrel{def}{=} \frac{\gamma \parallel \gamma_\perp}{4g^2}$.

$$\Delta L \stackrel{def}{=} L_f + g \partial_\alpha \left[-\frac{s-1}{2} \bullet \hat{S}_- + \frac{s+1}{2} \hat{S}_- \bullet \right] +$$

$$+ g \partial_{\bar{\alpha}} \left[-\frac{s-1}{2} \hat{S}_+ \bullet + \frac{s+1}{2} \bullet \hat{S}_+ \right]. \quad (2.10)$$

La perturbazione ΔL contiene lo liouvilliano della radiazione, e la parte di liouvilliano di interazione che fa evolvere la radiazione.

Conviene, per comodità, utilizzare l'ordinamento simmetrico $s = 0$. Per brevità nel seguito si indicherà con $W(\alpha, \bar{\alpha})$ la funzione di Wigner $W(\alpha, \bar{\alpha}; s = 0)$.

Si vede che le ipotesi per poter utilizzare la teoria dell'espansione perturbativa della master equation, presentata nel paragrafo 2.1, sono verificate se il tempo di vita del fotone in cavità è molto maggiore del rate di decadimento atomico (ovvero $\gamma \gg \gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$) e se il tempo a cui si considera la soluzione è molto maggiore del tempo di traccia (ovvero $t \gg t_* \sim \gamma_{\parallel}^{-1}, \gamma_{\perp}^{-1}$). La prima ipotesi indica che gli atomi sono le variabili veloci del sistema, mentre la radiazione è la variabile lenta. La seconda ipotesi garantisce che la matrice densità venga *rapidamente* portata allo stato "stazionario adiabatico" \hat{A} dallo liouvilliano di ordine zero L_0 . Le due ipotesi assieme assicurano la validità dell'approssimazione adiabatica, garantendo che gli atomi *inseguano* la radiazione e rimangano all'equilibrio con essa. Le figure 2.1 e 2.2 mostrano la validità dell'approssimazione adiabatica per un laser a un atomo. In figura 2.1 si vede il numero medio di fotoni $\langle \hat{n} \rangle \equiv \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle$, variabile "lenta" di campo, che va all'equilibrio. Nella figura 2.2 si vede il valor medio dell'inversione di popolazione saturata $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$, variabile "veloce" atomica, che "insegue" la variabile "lenta" raggiungendo molto più rapidamente il valore di equilibrio. Le figure sono state generate mediante programmi che utilizzano il metodo di simulazione del *quantum jump* descritto nel paragrafo 4.2.

Il calcolo di \hat{A} fornisce il risultato

$$\hat{A} = \prod_{\mu=1}^N \hat{A}_{\mu}, \quad \hat{A}_{\mu} = \frac{1}{2} + s_+ \hat{\sigma}_{+\mu} + s_- \hat{\sigma}_{-\mu} + s_z \hat{\sigma}_{z\mu}, \quad (2.11)$$

dove

$$s_z = \frac{\sigma_0}{2(1 + \frac{|\alpha|^2}{n_s})},$$

$$s_+ = -\frac{2g}{\gamma_{\perp}} \alpha s_z.$$

Dimostrazione: L'anello delle matrici di Pauli, generato dagli operatori atomici $\hat{I}_{(2,2)}, \hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-$ e $\hat{\sigma}_z$, è una base nello spazio di Liouville degli operatori di atomo singolo. Qualunque operatore di tale spazio è, pertanto, sviluppabile come una combinazione lineare degli operatori di questa base. Vale quindi il seguente sviluppo per l'operatore atomico \hat{A}_{μ} :

$$\hat{A}_{\mu} = \theta \hat{I} + \eta_- \hat{\sigma}_- + \eta_+ \hat{\sigma}_+ + \delta \hat{\sigma}_z.$$

Dalla condizione $\text{Tr}[\hat{A}_{\mu}] = 1$ si ricava immediatamente che $\theta = \frac{1}{2}$. Per ottenere gli altri coefficienti è necessario risolvere l'equazione operatoriale $L_0 \hat{A}_{\mu} = 0$, che per comodità si separerà in quattro termini

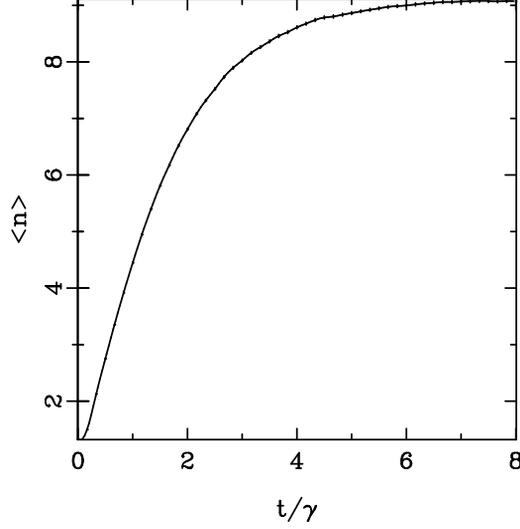


Figura 2.1: Grafico del valore medio dei fotoni $\langle \hat{n} \rangle \equiv \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle$ in un laser in funzione del tempo (il tempo è moltiplicato per il tempo di vita medio del fotone in cavità γ). I parametri del laser sono $N = 1$; $n_s = 3$; $C = 2$; $\sigma_0 = 1$; $\frac{\gamma_{\parallel}}{2\gamma_{\perp}} = 1$; $n_{th} = 0$ e si utilizza la condizione di atomo eccitato all'istante iniziale. Il valore di regime desunto dal grafico è circa di nove fotoni in cavità. Il grafico è stato ottenuto mediante un programma di simulazione che simula la master equation di laser (2.9), utilizzando il metodo del quantum jump descritto nel paragrafo 4.2.

la cui somma deve essere nulla (sfruttando l'ipotesi di non correlazione fra gli atomi è possibile fissare l'indice μ di atomo e lavorare su un solo atomo).

1. Per quanto riguarda la parte con il $\hat{\sigma}_z$ si ha

$$\begin{aligned}
 L_0 \hat{\sigma}_z &= [L_a \hat{\sigma}_z - g[\bar{\alpha} \hat{S}_- - \alpha \hat{S}_+, \hat{\sigma}_z]] = \\
 &= \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 + \sigma_0) \mathcal{D}[\hat{\sigma}_+] \hat{\sigma}_z + \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 - \sigma_0) \mathcal{D}[\hat{\sigma}_-] \hat{\sigma}_z + \frac{1}{2} \left(\gamma_{\perp} - \frac{\gamma_{\parallel}}{2} \right) \mathcal{D}[\hat{\sigma}_z] \hat{\sigma}_z + \\
 &\quad -g\bar{\alpha}[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] + g\alpha[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_z] = -\gamma_{\parallel} \hat{\sigma}_z - 2g(\bar{\alpha} \hat{\sigma}_- + \alpha \hat{\sigma}_+).
 \end{aligned}$$

2. Per la parte contenente $\hat{\sigma}_+$ si ottiene

$$L_0 \hat{\sigma}_+ = \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 + \sigma_0) \mathcal{D}[\hat{\sigma}_+] \hat{\sigma}_+ + \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 - \sigma_0) \mathcal{D}[\hat{\sigma}_-] \hat{\sigma}_+ +$$

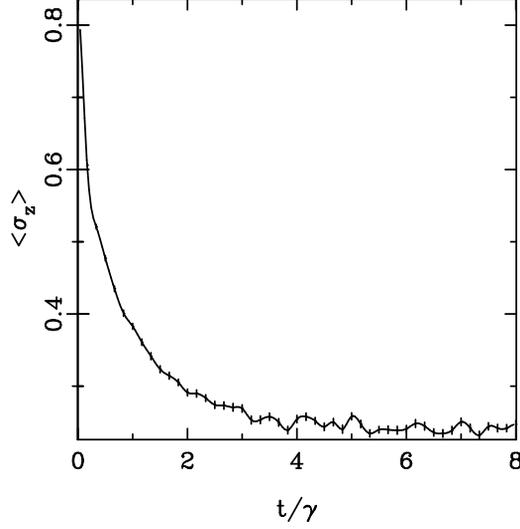


Figura 2.2: Grafico del valore medio dell'inversione di popolazione saturata $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ dell'atomo di un laser monoatomico in funzione del tempo. I parametri sono dati nella didascalia della figura precedente. È interessante notare che l'equilibrio viene raggiunto più rapidamente che per quanto riguarda le variabili di campo $\langle \hat{n} \rangle$, confermando così la validità dell'approssimazione adiabatica. Lo stato stazionario è $\langle \hat{\sigma}_z \rangle \simeq 0.25$, risultato che si ottiene anche da $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \frac{\sigma_0}{1 + \frac{\langle \hat{n} \rangle}{n_s}}$, sostituendo $\langle \hat{n} \rangle \simeq 9$.

$$+\frac{1}{2} \left(\gamma_{\perp} - \frac{\gamma_{\parallel}}{2} \right) \mathcal{D}[\sigma_z] \sigma_+ - g\bar{\alpha}[\sigma_-, \sigma_+] = -\gamma_{\perp} \sigma_+ + g\bar{\alpha} \hat{\sigma}_z$$

I calcoli per i termini contenenti σ_- e \hat{I} sono del tutto analoghi, e forniscono i risultati

3.

$$L_0 \sigma_- = -\gamma_{\perp} \sigma_- + g\alpha \hat{\sigma}_z.$$

4.

$$L_0 \hat{I} = \gamma_{\parallel} \sigma_0 \hat{\sigma}_z.$$

La somma dei quattro termini $L_0(\theta \hat{I} + \eta_- \sigma_- + \eta_+ \sigma_+ + \delta \hat{\sigma}_z)$ si annullerà se e solo se si annullano i coefficienti della base dell'anello delle matrici di Pauli. Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} \eta_-(g\alpha) + \eta_+(g\bar{\alpha}) + \delta(-\gamma_{\parallel}) = -\frac{\gamma_{\parallel} \sigma_0}{2} \\ \eta_-(\gamma_{\perp}) + \delta(-2g\bar{\alpha}) = 0 \\ \eta_+(\gamma_{\perp}) + \delta(-2g\alpha) = 0 \end{cases}$$

La cui soluzione è

$$\delta = \sigma_0 \left(1 + \frac{4g^2|\alpha|^2}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}\right)^{-1}; \quad \eta_{-} = -2\frac{g\bar{\alpha}}{\gamma_{\perp}}\delta; \quad \eta_{+} = \bar{\eta}_{-}$$

Si passa ora al calcolo dello liouvilliano fino al second'ordine, nella rappresentazione differenziale (equazione di Fokker-Planck) per quanto riguarda la radiazione.⁽⁶⁾

La master equation, tracciata sui gradi di libertà atomici è $\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = L\rho(t)$, con $L = L^{(1)} + L^{(2)}$.

Al primo ordine si ha

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= \text{Tr}_0[\Delta L \hat{A}] = L_f \text{Tr}_0[\hat{A}] + \text{Tr}_0 \left[g \partial_{\alpha} \left(-\frac{s-1}{2} \hat{A} \hat{S}_{-} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{s+1}{2} \hat{S}_{-} \hat{A} \right) + g \partial_{\bar{\alpha}} \left(-\frac{s-1}{2} \hat{S}_{+} \hat{A} + \frac{s+1}{2} \hat{A} \hat{S}_{+} \right) \right] = L_f \text{Tr}_0[\hat{A}] + \\ &+ g \partial_{\alpha} \text{Tr}_0 \left[\sum_{\nu} \prod_{\mu} \left(\frac{1}{2} + S \hat{\sigma}_{+\mu} + \bar{S} \hat{\sigma}_{-\mu} + S_z \hat{\sigma}_{z\mu} \right) \hat{\sigma}_{-\nu} \right] \frac{-(s-1) + s+1}{2} + \\ &+ g \partial_{\bar{\alpha}} \text{Tr}_0 \left[\sum_{\nu} \prod_{\mu} \left(\frac{1}{2} + S \hat{\sigma}_{+\mu} + \bar{S} \hat{\sigma}_{-\mu} + S_z \hat{\sigma}_{z\mu} \right) \hat{\sigma}_{+\nu} \right] \frac{-(s-1) + s+1}{2}. \end{aligned}$$

Utilizzando la proprietà $\text{Tr}_0[\hat{A}] = 1$ ed eliminando i termini a traccia nulla, si ottiene (per ordinamento simmetrico $s = 0$)

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= L_f + g \partial_{\alpha} \sum_{\nu} \text{Tr}_0[S \hat{\sigma}_{+\nu} \hat{\sigma}_{-\nu}] + g \partial_{\bar{\alpha}} \sum_{\nu} \text{Tr}_0[\bar{S} \hat{\sigma}_{-\nu} \hat{\sigma}_{+\nu}] = \\ &= L_f + g \partial_{\alpha} N \alpha \frac{\sigma_0 \frac{2g}{\gamma_{\perp}}}{1 + \frac{|\alpha|^2}{n_s}} + g \partial_{\bar{\alpha}} N \bar{\alpha} \frac{\sigma_0 \frac{2g}{\gamma_{\perp}}}{1 + \frac{|\alpha|^2}{n_s}} = \\ &= \frac{\gamma}{2} (\partial_{\alpha} \alpha + \partial_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha}) \left(1 + \frac{4\sigma_0 C}{1 + \frac{|\alpha|^2}{n_s}} \right) + \frac{\gamma}{2} \partial_{\alpha \bar{\alpha}}^2 [2(n_{th} + 1) - (s + 1)], \end{aligned}$$

⁶Nel seguito $\hat{\rho}$ (traccia parziale sugli atomi della matrice densità globale $\hat{R}(t)$) sarà una funzione di Wigner e non un operatore e L sarà un operatore differenziale e non un superoperatore.

dove si è introdotto il parametro di cooperazione $C \stackrel{def}{=} \frac{g^2 N}{\gamma_{\perp} \gamma}$.

La parte con le derivate di primo ordine è un termine di drift che si può anche ottenere dalla teoria semiclassica di Maxwell–Bloch. La parte restante contiene un termine della diffusione.

Al secondo ordine, usando la definizione di ΔL (2.10) e la proprietà di commutazione del prodotto di operatori sotto il segno di traccia, si ha

$$\begin{aligned}
L^{(2)} &= \text{Tr}_0 \int_0^t d\tau \Delta L (e^{L_0 \tau} - \hat{A} \text{Tr}_0) \Delta L \hat{A} = \\
&= - \int_0^t d\tau (g \partial_{\alpha} \text{Tr}_0 [\hat{S}_- (e^{L_0 \tau} - \hat{A} \text{Tr}_0) \Delta L \hat{A}] - c.c.) + \\
&\quad + \int_0^t d\tau \mathcal{L}_f \text{Tr}_0 [(e^{L_0 \tau} - \hat{A} \text{Tr}_0) \Delta L \hat{A}],
\end{aligned} \tag{2.12}$$

di cui il secondo integrale è nullo, dato che $\text{Tr}_0 [e^{L_0 \tau} \Delta L \hat{A}] = \text{Tr}_0 [\Delta L \hat{A}]$ e $\text{Tr}_0 [\hat{A}] = 1$.

Per poter eseguire il primo integrale, bisogna conoscere l'andamento nel tempo delle funzioni

$$\begin{aligned}
f_-(t) &\stackrel{def}{=} \text{Tr}_0 [\hat{S}_- e^{L_0 t} \hat{X}], \\
f_+(t) &\stackrel{def}{=} \text{Tr}_0 [\hat{S}_+ e^{L_0 t} \hat{X}], \\
f_z(t) &\stackrel{def}{=} \text{Tr}_0 [\hat{S}_z e^{L_0 t} \hat{X}],
\end{aligned}$$

con \hat{X} operatore generico.

Differenziando le tre funzioni ora definite si ottiene un sistema di equazioni differenziali accoppiate, risolubile mediante trasformata di Laplace e il metodo di Kramer. Una volta ottenuta la dipendenza temporale di $f_-(t)$, $f_+(t)$ e $f_z(t)$, si può calcolare l'integrale (2.12).

La differenziazione della $f_-(t)$ porta all'espressione

$$\partial_t f_-(t) = \text{Tr}_0 \hat{S}_- L_0 e^{L_0 t} \hat{X} = \text{Tr}_0 \hat{S}_- L_a e^{L_0 t} \hat{X} + g \text{Tr}_0 \hat{S}_- [\bar{\alpha} \hat{S}_- - \alpha \hat{S}_+, e^{L_0 t} \hat{X}],$$

dove

$$\hat{S}_- L_a = \sum_{\mu\nu} \hat{\sigma}_{-\mu} \left[\frac{\gamma_{\parallel}}{2} (1 + \sigma_0) \mathcal{D}[\hat{\sigma}_{+\nu}] + \frac{\gamma_{\parallel}}{2} (1 - \sigma_0) \mathcal{D}[\hat{\sigma}_{-\nu}] + \text{frac}14 \left(\gamma_{\perp} - \frac{\gamma_{\parallel}}{2} \right) \right] \mathcal{D}[\hat{\sigma}_{z\nu}]$$

È da notare che per $\mu \neq \nu$ si ha $\text{Tr}_0[\hat{\sigma}_\mu \mathcal{D}[\hat{\sigma}_\nu] \hat{O}] = 0$ per $\forall \hat{O}$ ($\hat{\sigma}$ indica qui uno qualunque degli operatori di Pauli), dato che $\hat{\sigma}_\mu$ e $\hat{\sigma}_\nu$ commutano fra loro e sono a traccia nulla. Usando questa proprietà si può inserire una $\delta_{\mu\nu}$ nella sommatoria, indicando con ciò che si considerano solo i termini a traccia non nulla:

$$\hat{S}_- L_a = -\frac{\gamma_{\parallel}}{4}(1 + \sigma_0)\hat{S}_- - \frac{\gamma_{\parallel}}{4}(1 - \sigma_0)\hat{S}_- - \left(\gamma_{\perp} - \frac{\gamma_{\parallel}}{2}\right)\hat{S}_- = -\gamma_{\perp}\hat{S}_-.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \text{Tr}_0\left\{\hat{S}_-[\bar{\alpha}\hat{S}_- - \alpha\hat{S}_+, e^{L_0 t}\hat{X}]\right\} &= \text{Tr}_0[\bar{\alpha}\hat{S}_-\hat{S}_-e^{L_0 t}\hat{X} - \alpha\hat{S}_-\hat{S}_+e^{L_0 t}\hat{X} - \bar{\alpha}\hat{S}_-e^{L_0 t}\hat{X}\hat{S}_- + \alpha\hat{S}_-e^{L_0 t}\hat{X}\hat{S}_+] = \\ &= \alpha\text{Tr}_0\left\{[\hat{S}_+, \hat{S}_-]e^{L_0 t}\hat{X}\right\}. \end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che per $\mu \neq \nu$ $\hat{\sigma}_\mu$ commuta con $\hat{\sigma}_\nu$ si ottiene che $[\hat{S}_+, \hat{S}_-] = \sum_{\mu\nu}[\hat{\sigma}_{+\mu}, \hat{\sigma}_{-\nu}] = \sum \hat{\sigma}_{z\mu} = \hat{S}_z$. E quindi

$$\text{Tr}_0\left\{\hat{S}_-[\bar{\alpha}\hat{S}_- - \alpha\hat{S}_+, e^{L_0 t}\hat{X}]\right\} = \alpha\text{Tr}_0[\hat{S}_z e^{L_0 t}\hat{X}] = \alpha f_z(t)$$

Unendo i risultati ottenuti si ottiene la derivata di $f_-(t)$

$$\partial_t f_-(t) = -\gamma_{\perp} f_-(t) + g\alpha f_z(t) \quad (2.13)$$

È del tutto analogo il calcolo per la derivata della $f_+(t)$ e $f_z(t)$:

$$\partial_t f_+(t) = -\gamma_{\perp} f_+(t) + g\bar{\alpha} f_z(t) \quad (2.14)$$

$$\partial_t f_z(t) = -\gamma_{\parallel} f_z(t) - \sigma_0 \gamma_{\parallel} N \text{Tr}_0[e^{L_0 t}\hat{X}] - 2g(\bar{\alpha} f_- + \alpha f_+) \quad (2.15)$$

Usando la proprietà $\text{Tr}[e^{L t}\hat{O}] = \text{Tr}[\hat{O}]$ si può sostituire $\text{Tr}_0[e^{L_0 t}\hat{X}]$ con $\text{Tr}_0[\hat{X}]$ nella (2.15).

Ho così un sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \partial_t f_z(t) = a_1 f_z + a_2 f_+ + \bar{a}_2 f_- + a_3 \\ \partial_t f_+(t) = b_1 f_z + b_2 f_+ \\ \partial_t f_-(t) = \bar{b}_1 f_z + \bar{b}_2 f_- \end{cases},$$

che può essere trasformato in un sistema algebrico usando il metodo delle trasformate di Laplace:

$$\begin{cases} (p - a_1)f_z(p) - a_2 f_+(p) - \bar{a}_2 f_-(p) = \left(\frac{a_3}{p} + f_{z0}\right) \\ b_1 f_z(p) + (b_2 - p)f_+(p) = -f_{+0} \\ \bar{b}_1 f_z(p) + (\bar{b}_2 - p)f_-(p) = -f_{-0} \end{cases},$$

dove $a_1 \stackrel{def}{=} -\gamma_{\parallel}$; $a_2 \stackrel{def}{=} -2g\alpha$; $a_3 \stackrel{def}{=} -\sigma_0 N \gamma_{\parallel} \text{Tr}\hat{X}$; $b_1 \stackrel{def}{=} g\bar{\alpha}$; $b_2 \stackrel{def}{=} -\gamma_{\perp}$.

f_{z0}, f_{+0}, f_{-0} sono i valori delle funzioni $f(t)$ all'istante iniziale, cioè $f_{z0} = \text{Tr}_0 \hat{S}_z \hat{X}$; $f_{+0} = \text{Tr}_0 \hat{S}_+ \hat{X}$; $f_{-0} = \text{Tr}_0 \hat{S}_- \hat{X}$. Usando il metodo di Kramer:

$$f_-(p) = \frac{\begin{vmatrix} (p - a_1) & -a_2 & \left(\frac{a_3}{p} + f_{z0}\right) \\ b_1 & (b_2 - p) & -f_{+0} \\ \bar{b}_1 & 0 & -f_{-0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (p - a_1) & -a_2 & -\bar{a}_3 \\ b_1 & (b_2 - p) & 0 \\ \bar{b}_1 & 0 & (b_2 - p) \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{(p-a_1)f_{-0} + f_{z_0}\bar{b}_1}{(p-p_1)(p-p_2)} - \frac{a_3\bar{b}_1}{p(p-p_1)(p-p_2)} - \frac{a_2(\bar{b}_1f_{+0} - b_1f_{-0})}{(p-b_2)(p-p_1)(p-p_2)},$$

dove $p_1 \stackrel{def}{=} \frac{\sqrt{(b_2-a_1)^2 + 4(\bar{a}_2\bar{b}_1 + a_2b_1)} + b_2 + a_1}{2}$, mentre $p_2 \stackrel{def}{=} \frac{\sqrt{(b_2-a_1)^2 + 4(\bar{a}_2\bar{b}_1 + a_2b_1)} - b_2 + a_1}{2}$. Qui la funzione $f_-(p)$ è stata scritta nella maniera che rende più agevole il calcolo dell'antitrasformata:

$$\begin{aligned} f_-(t) = & -\frac{(p_1-a_1)f_{-0} + \bar{b}_1f_{z_0}}{p_1-p_2}e^{p_1t} + \frac{(p_2-a_1)f_{-0} + \bar{b}_1f_{z_0} + \bar{b}_1f_{z_0}}{p_1-p_2}e^{p_2t} + \\ & -a_3\bar{b}_1 \left[\frac{1}{p_1p_2} + \frac{e^{p_1t}}{(p_1-p_2)p_1} + \frac{e^{p_2t}}{p_2(p_2-p_1)} \right] - (a_2\bar{b}_1f_{+0} - a_2b_1f_{-0}) \left[\frac{e^{b_2t}}{(b_2-p_1)(b_2-p_2)} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{p_1t}}{(p_1-p_2)(p_1-b_2)} + \frac{e^{p_2t}}{(p_2-p_1)(p_2-b_2)} \right]. \end{aligned}$$

A parte un termine costante, la funzione è una combinazione di esponenziali. L'integrale sul tempo (2.12) è, pertanto, immediatamente calcolabile. Ricordando che tutta la teoria va applicata a tempi $t \gg t_* \simeq \gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$, conviene verificare che per i tempi ammessi i termini $e^{p_1t}, e^{p_2t}, e^{b_2t}$ sono trascurabili. Si vede immediatamente dalla definizione di b_2 e di p_2 che essi sono paragonabili o inferiori a $-\gamma_{\perp}$. Per quanto riguarda p_1 , è necessario fare una maggiorazione:

$$p_1 = \frac{\sqrt{(\gamma_{\parallel} - \gamma_{\perp})^2 - 16g^2|\alpha|^2} - \gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel}}{2} \leq \frac{|\gamma_{\parallel} - \gamma_{\perp}| - \gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel}}{2} = \begin{cases} = -\gamma_{\parallel} & \text{se } \gamma_{\perp} > \gamma_{\parallel} \\ = -\gamma_{\perp} & \text{se } \gamma_{\parallel} > \gamma_{\perp} \end{cases},$$

che dimostra che per $t \gg t_*$ anche e^{p_1t} è trascurabile.

Il calcolo dell'integrale (2.12), con la condizione $t \gg t_*$ fornisce il seguente risultato, indipendente dal tempo

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \text{Tr}_0[\hat{S}_-(e^{L_0\tau} - \hat{A}\text{Tr}_0)\hat{X}] \simeq & \frac{1}{\gamma_{\perp}(1 + \frac{4g^2}{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}}|\alpha|^2)} \left[-\frac{g\alpha}{\gamma_{\parallel}}\text{Tr}[\hat{S}_z\hat{X}] + \right. \\ & + \text{Tr}_0[\hat{S}_+\hat{X}] \left(\frac{2g^2\alpha^2}{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}} \right) - \left(1 + \frac{2g^2|\alpha|^2}{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}} \right) \text{Tr}_0[\hat{S}_-\hat{X}] + \\ & \left. - \left(\frac{\sigma_0 Ng\alpha}{\gamma_{\perp}(1 + \frac{4g^2|\alpha|^2}{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}})} \right) \left(1 + \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel}} \right) \text{Tr}_0[\hat{X}] \right] \quad (2.16) \end{aligned}$$

Al fine di ottenere l'espressione finale è ancora necessario valutare i termini contenenti $\hat{X} \stackrel{def}{=} \Delta L \hat{A}$, usando la definizione (2.10) di ΔL :

$$\begin{aligned} \text{Tr}\hat{S}_-\hat{X} = \text{Tr}_0\hat{S}_-\Delta L\hat{A} = & -\frac{g}{2}\partial_{\alpha}\text{Tr}_0[\hat{S}_-\hat{S}_-\hat{A} + \hat{S}_-\hat{A}\hat{S}_-] - \frac{g}{2}\partial_{\alpha}\text{Tr}_0[\hat{S}_-\hat{A}\hat{S}_+ + \hat{S}_-\hat{S}_+\hat{A}] + \\ & + \gamma[\partial_{\alpha}\alpha + \partial_{\bar{\alpha}}\bar{\alpha} + \partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2]\text{Tr}_0\hat{S}_-\hat{A} = -g\partial_{\alpha}\text{Tr}_0[\hat{S}_-\hat{S}_-\hat{A}] + \\ & -\frac{g}{2}\partial_{\alpha}[\{\hat{S}_-, \hat{S}_+\} + \hat{A}] + \gamma[\partial_{\alpha}\alpha + \partial_{\bar{\alpha}}\bar{\alpha} + \partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2]\text{Tr}_0\hat{S}_-\hat{A}, \end{aligned}$$

dove $\{\dots, \dots\}_+$ indica l'anticommutatore e dove

1.

$$\text{Tr}_0 \hat{S}_- \hat{S}_- \hat{A} = \text{Tr}_0 \prod_{\alpha} \sum_{\mu\nu} \hat{\sigma}_{-\mu} \hat{\sigma}_{-\nu} \left(\frac{1}{2} + S \hat{\sigma}_{+\alpha} + \bar{S} \hat{\sigma}_{-\alpha} + S_z \hat{\sigma}_{z\alpha} \right),$$

dove tutti i termini per cui $\mu \neq \nu$ sono a traccia nulla. Per $\mu = \nu$, però, si trova $\hat{\sigma}_{-\mu} \hat{\sigma}_{-\mu} = 0$, per cui

$$\text{Tr}_0 \hat{S}_- \hat{S}_- \hat{A} = 0$$

2.

$$\text{Tr}_0 \{ \hat{S}_+, \hat{S}_- \} \hat{A} = \text{Tr}_0 \prod_{\alpha} \left(\sum_{\mu} \{ \hat{\sigma}_{+\mu}, \hat{\sigma}_{-\mu} \}_+ + \sum_{\mu, \nu \neq \mu} \{ \hat{\sigma}_{+\mu}, \hat{\sigma}_{-\nu} \}_+ \right) \left(\frac{1}{2} + S \hat{\sigma}_{+\alpha} + \bar{S} \hat{\sigma}_{-\alpha} + S_z \hat{\sigma}_{z\alpha} \right),$$

dove delle due sommatorie, solo la prima contiene termini a traccia non nulla. Usando le parentesi di anticommutazione applicate sugli operatori di Pauli

$$\{ \hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_+ \}_+ = \hat{I},$$

si ottiene

$$\text{Tr}_0 \{ \hat{S}_+, \hat{S}_- \} \hat{A} = N \text{Tr}_0 [\hat{A}] = N$$

3. Gli altri termini sono del tutto analoghi e saranno per brevità omissi.

Si ottiene finalmente il risultato finale mettendo assieme i termini ottenuti dal calcolo al primo e al secondo ordine. Convienne riscaldare i campi utilizzando il numero di fotoni di saturazione, cioè definire una nuova variabile di campo $u \stackrel{def}{=} \frac{\alpha}{\sqrt{n_s}} = \frac{\alpha 2g}{\sqrt{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}}}$. Lo liouvilliano totale sarà quindi

$$L = L^{(1)} + L^{(2)} = \partial_u D_u + \partial_{\bar{u}} \bar{D}_u + \partial_{u^2}^2 D_{uu} + \partial_{\bar{u}^2}^2 \bar{D}_{uu} + \partial_{u\bar{u}}^2 D_{u\bar{u}}, \quad (2.17)$$

dove

$$D_u \stackrel{def}{=} \gamma u \left\{ 1 - \frac{2\sigma_0 C}{1 + |u|^2} + \frac{\sigma_0 N}{2n_s(1 + |u|^2)^3} [(1 + f)|u|^2 - f] \left(1 - \frac{2\sigma_0 C}{1 + |u|^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{C}{2n_s(1 + |u|^2)^4} [(3 + |u|^2)(1 + |u|^2)^2 + \sigma_0^2(1 - |u|^2) - 4\sigma_0^2 f |u|^2] \right\} \quad (2.18)$$

$$D_{uu} \stackrel{def}{=} - \frac{C \gamma u^2}{2n_s(1 + |u|^2)^3} [\sigma_0^2(1 + 2f) + (1 + |u|^2)^2]$$

$$D_{u\bar{u}} \stackrel{def}{=} \frac{\gamma}{n_s} + \frac{C\gamma}{n_s(1+|u|^2)^3} [(1+|u|^2)^2(2+|u|^2) - |u|^2\sigma_0^2(1+2f)],$$

in cui si è introdotto il nuovo parametro

$$f \stackrel{def}{=} \frac{\gamma_{\parallel}}{2\gamma_{\perp}}.$$

È conveniente scrivere l'equazione (2.17) nella forma vettoriale (1.11)

$$\frac{d}{dt}W(u, \bar{u}) = (\vec{\nabla}_{\bar{u}} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}_{\bar{u}} : \vec{A})W(u, \bar{u}),$$

dove

$$\vec{\nabla}_{\bar{u}} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_{\bar{u}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\nabla}_{\bar{u}} \stackrel{def}{=} \vec{\nabla}_{\bar{u}} \vec{\nabla}_{\bar{u}} = \begin{pmatrix} \partial_{uu}^2 & \partial_{u\bar{u}}^2 \\ \partial_{u\bar{u}}^2 & \partial_{\bar{u}\bar{u}}^2 \end{pmatrix}$$

e dove sono stati introdotti il vettore di drift e la matrice di diffusione, così definiti:

$$\vec{D} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} D_u \\ \bar{D}_u \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{A} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 2D_{uu} & D_{u\bar{u}} \\ D_{u\bar{u}} & 2\bar{D}_{\bar{u}\bar{u}} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Conclusioni:

In questo paragrafo ho ottenuto la rappresentazione differenziale dello liou-villiano con cui ricavare l'equazione di Fokker-Planck per la dinamica del laser. Le approssimazioni compiute sono al second'ordine nei parametri di piccolezza di ΔL e si è provveduto a tracciare sui gradi di libertà atomici. L'equazione ottenuta è

$$\frac{d}{dt}W(u, \bar{u}) = L(u, \bar{u}, \vec{\nabla}_{\bar{u}}, \vec{\nabla}_{\bar{u}})W(u, \bar{u}), \quad (2.20)$$

con L operatore differenziale definito dalla (2.17) e seguenti.

Le simulazioni presentate nei capitoli successivi si baseranno tutte su questa equazione. Fanno eccezione solo le simulazioni di controllo eseguite con il metodo del *quantum jump* (presentato nel paragrafo 4.2), basate sulla master equation.

Schema riassuntivo dei parametri usati e delle relazioni fra loro:

Tra tutti i parametri introdotti in letteratura ⁷ (e ripresi nella presente trattazione) solo sei sono i parametri indipendenti. Come parametri indipendenti per eseguire le simulazioni si sceglieranno solitamente i sei: C , n_s , σ_0 , N , f e γ . Le seguenti relazioni legano fra loro tutti i parametri introdotti finora:

$$n_s \stackrel{def}{=} \frac{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}}{4g^2}, \quad C \stackrel{def}{=} \frac{Ng^2}{\gamma\gamma_{\perp}}; \quad f \stackrel{def}{=} \frac{\gamma_{\parallel}}{2\gamma_{\perp}}, \quad (2.21)$$

mentre le relazioni inverse sono date da

$$\gamma_{\parallel} = \frac{4\gamma C n_s}{N}, \quad \gamma_{\perp} = \frac{2\gamma C n_s}{Nf}, \quad g = \frac{2\gamma C}{N} \sqrt{\frac{n_s}{2f}}. \quad (2.22)$$

Per completezza vengono anche richiamate le relazioni che sussistono fra di essi affinché sia valida la teoria sviluppata in questo paragrafo:

$$\begin{aligned} \gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp} \gg \gamma &\Rightarrow \frac{N}{n_s} \ll 4C, \quad \frac{Nf}{n_s} \ll 2C; \\ t \gg t_* \sim \gamma_{\parallel}^{-1}, \gamma_{\perp}^{-1} &\Rightarrow \frac{1}{\gamma t} \ll \frac{4n_s C}{N}, \quad \frac{2n_s C}{fN}; \\ \frac{g^2}{\gamma_{\parallel} \gamma_{\perp}} \ll 1 &\Rightarrow n_s \gg 1/4; \\ 2\gamma_{\perp} \geq \gamma_{\parallel} &\Rightarrow f \geq 1. \end{aligned}$$

2.4 Condizioni iniziali per l'equazione di Fokker–Planck.

L'equazione differenziale (2.20) ottenuta nel paragrafo precedente ha come soluzione la funzione di Wigner W descrivente lo stato del sistema al tempo t . Il calcolo di tale soluzione necessita però di una condizione iniziale nella forma di una $W(\alpha, \bar{\alpha}, t = 0)$ che individui lo stato del sistema all'istante iniziale. In questo paragrafo verranno date le condizioni iniziali associate a stati iniziali numero $|n\rangle$ o stati coerenti $|\alpha\rangle$ della radiazione.

⁷Da notare che in [2] e [3] il parametro g ha segno opposto e il rate di decadimento γ è la metà di quello usato qui. Inoltre $\sigma_0^{Lugiato} = 2\sigma_0^{Haake}$ e in [3] l'ordinamento s viene indicato mediante il parametro $\epsilon \stackrel{def}{=} (s+1)/2$.

Stato numero $|n\rangle$: La matrice densità di un sistema in uno stato numero è $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$. La funzione di Wigner $W(\alpha, \bar{\alpha}; s = 0)$ corrispondente si ricava utilizzando la (1.9), specializzata al caso di ordinamento simmetrico $s = 0$ e di $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$:

$$\begin{aligned} W(\alpha, \bar{\alpha}; s = 0) &= \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \text{Tr}[(-1)^{\hat{a}+\hat{a}} e^{2\bar{\alpha}\hat{a}} |n\rangle\langle n| e^{2\alpha\hat{a}^+}] = \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \text{Tr}[(-1)^{\hat{a}+\hat{a}} \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(2\bar{\alpha})^m (2\alpha)^l}{m!l!} \hat{a}^m |n\rangle\langle n| (\hat{a}^+)^l]. \end{aligned}$$

Se si calcola la traccia usando stati numero ($\text{Tr}[\dots] = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\dots|n\rangle$) e si utilizza l'identità

$$\hat{a}^m |n\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}} |n-m\rangle & \text{per } n \leq m \\ 0 & \text{per } m > n \end{cases},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} W(\alpha, \bar{\alpha}; s = 0) &= \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \sum_{m=0}^n \frac{(4|\alpha|^2)^m n!}{(m!)^2 (n-m)!} = \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} (-1)^n L_n^0(4|\alpha|^2), \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove L_n^0 è il polinomio di Laguerre di ordine n definito dalla

$$L_q^0(z) \stackrel{def}{=} \sum_{s=0}^q \frac{(-1)^s q!}{(q-s)! (s!)^2} z^s. \quad (2.24)$$

Utilizzando la relazione trovata, si ricava immediatamente la condizione iniziale per sistema in stato di vuoto $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$:

$$W(\alpha, \bar{\alpha}, s = 0) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \quad (2.25)$$

Stato coerente $|\alpha\rangle$: La $W(\alpha, \bar{\alpha}; s = 0)$ che individua una matrice densità per sistema in stato coerente ($\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$) si ricava in maniera identica al caso precedente:

$$W(\beta, \bar{\beta}, s = 0) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta|^2} \text{Tr}[(-1)^{\hat{a}+\hat{a}} e^{2\bar{\beta}\hat{a}} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{2\beta\hat{a}^+}].$$

Anche qui si calcola la traccia usando stati numero e si ottiene:

$$W(\beta, \bar{\beta}, s = 0) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta|^2} e^{2(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |\langle\alpha|n\rangle|^2 = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha-\beta|^2}. \quad (2.26)$$

2.5 Confronto con la teoria di L. Lugiato.

La teoria del laser di F. Haake *et al.* che è stata analizzata nel presente capitolo è uno sviluppo della teoria presentata da Lugiato, Casagrande e Pizzuto [2]. Qui non verrà analizzata in dettaglio la teoria di Lugiato *et al.*, ma ne verranno presentati i risultati per un confronto [8] con la teoria di Haake.

La differenza sostanziale fra le due teorie consiste nella scelta dell'ordine zero dello liouvilliano su cui fare l'espansione di Born adiabatica per la master equation. Come visto nel paragrafo 2.1, lo liouvilliano di laser (2.8),

$$L = L_a + L_f + L_{af},$$

va separato in due parti: la parte che va considerata come ordine zero L_0 e la parte di perturbazione ΔL . La scelta di Lugiato è

$$L_0 \stackrel{def}{=} L_a + g[\alpha \hat{S}_+ - \bar{\alpha} \hat{S}_-, \bullet] + L_f ; \Delta L \stackrel{def}{=} g(\partial_\alpha \hat{S}_- \bullet + \partial_{\bar{\alpha}} \bullet \hat{S}_+),$$

laddove Haake, secondo quanto visto nel paragrafo 2.2, inserisce lo liouvilliano di radiazione L_f nel termine di perturbazione ΔL . Lugiato pertanto considera la radiazione quantizzata come un grado di libertà del sistema già all'ordine zero. Essa viene però trattata in maniera classica (mediante il commutatore che compare in L_0) per quanto riguarda l'interazione con i gradi di libertà atomici. Al contrario Haake inserisce la radiazione quantizzata solamente nella perturbazione ΔL : all'ordine zero si utilizza radiazione classica di intensità $|\alpha|^2$.

Si ottengono i medesimi risultati dalle due teorie per quanto riguarda la matrice di diffusione (i.e. i termini D_{uu} e $D_{u\bar{u}}$ che compaiono nell'equazione di Fokker-Planck). Per quanto riguarda il vettore di drift (individuato dal termine D_u), il risultato di Lugiato manca della parte al second'ordine nei parametri di piccolezza di ΔL :

$$D_u^{\text{Lug.}} = \gamma u \left(1 - \frac{2\sigma_0 C}{1 + |u|^2} \right). \quad (2.27)$$

Dalla teoria di Haake si ricava la (2.18)

$$D_u^{\text{Haake}} \stackrel{def}{=} \gamma u \left\{ 1 - \frac{2\sigma_0 C}{1 + |u|^2} + \frac{\sigma_0 N}{2n_s(1 + |u|^2)^3} [(1 + f)|u|^2 - f] \left(1 - \frac{2\sigma_0 C}{1 + |u|^2} \right) + \right.$$

$$+\frac{C}{2n_s(1+|u|^2)^4}[(3+|u|^2)(1+|u|^2)^2+\sigma_0^2(1-|u|^2)-4\sigma_0^2f|u|^2]\Big\}$$

Le differenze tra le teorie non sono comunque sostanziali dal punto di vista dei risultati. I termini in più contenuti nel drift (2.18) che si ottiene dalla teoria di Haake sono trascurabili a causa della approssimazione adiabatica. L'approssimazione adiabatica richiede che valgano le disuguaglianze

$$\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma}, \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma}, \frac{g}{\gamma} \gg 1.$$

Questo, usando le definizioni del numero di fotoni di saturazione n_s e del parametro di cooperazione C , implica che

$$\frac{N}{n_s} \ll 4C.$$

Quindi il termine di (2.18) contenente i parametri $\frac{\sigma_0 N}{2n_s}$ è trascurabile rispetto al termine contenente $2\sigma_0 C$. L'altro termine in eccesso ha un peso maggiore, anche se con i parametri utilizzati in questa tesi si ha

$$\frac{C}{n_s} \ll 1.$$

In figura 2.3 viene messo a confronto il coefficiente di drift ottenuto a partire dalla teoria di Lugiato (2.27) con quello ottenuto a partire dalla teoria di Haake (2.18). Per valori dei parametri di interesse nella presente trattazione e scelti in modo da soddisfare l'approssimazione adiabatica. Si riscontrano differenze per numero di fotoni in uscita attorno al valore di saturazione (cosa che del resto si vede dal confronto tra (2.18) e (2.27) sostituendo $|u|^2 \simeq 1$). Molte delle simulazioni che verranno presentate sono state eseguite usando sia le equazioni di Fokker–Planck ottenute dalla teoria di Lugiato che dalla teoria di Haake. Inoltre le due teorie sono state confrontate per il caso stazionario del quale è possibile ottenere una forma analitica, come si vedrà nel paragrafo 2.6.

Non sono mai state riscontrate differenze fisicamente e qualitativamente rilevanti tra le due teorie.

2.6 Soluzione analitica per il caso stazionario.

L'equazione di Fokker–Planck (2.20) che descrive il funzionamento del laser può essere risolta analiticamente nel caso stazionario, i.e. per $t \rightarrow \infty$. Questa proprietà si rivela molto utile per controllare i programmi di simulazione al computer. Mediante l'ergodicità (cfr. paragrafo 4.1.4) si può simulare lo stato stazionario a partire dalle medesime routines utilizzate per la simulazione dell'amplificatore laser. Mediante il confronto fra lo stato stazionario simulato e quello analitico è stato possibile effettuare una efficace messa a punto dei programmi.

Si dimostrerà che per $t \rightarrow \infty$ la soluzione $W(u, \bar{u})$ dell'equazione di Fokker–Planck gode di simmetria per rotazione attorno all'asse ($u = 0, \bar{u} = 0$). È conveniente pertanto utilizzare le coordinate polari $u \stackrel{def}{=} r^{\frac{1}{2}} e^{i\phi}$; $\bar{u} \stackrel{def}{=} r^{\frac{1}{2}} e^{-i\phi}$ e portarsi così al caso unidimensionale $W(r, \phi) \equiv W(r)$.

Per guadagnare spazio e chiarezza conviene porre

$$\begin{aligned} a(|u|^2) &\stackrel{def}{=} \left\{ 1 - \frac{2\sigma_0 C}{1 + |u|^2} + \frac{\sigma_0 N}{2n_s(1 + |u|^2)^3} [(1 + f)|u|^2 - f] \left(1 - \frac{2\sigma_0 C}{1 + |u|^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C}{2n_s(1 + |u|^2)^4} [(3 + |u|^2)(1 + |u|^2)^2 + \sigma_0^2(1 - |u|^2) - 4\sigma_0^2 f |u|^2] \right\} \\ b(|u|^2) &\stackrel{def}{=} - \frac{C}{2n_s(1 + |u|^2)^3} [\sigma_0^2(1 + 2f) + (1 + |u|^2)^2] \\ c(|u|^2) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{n_s} + \frac{C}{n_s(1 + |u|^2)^3} [(1 + |u|^2)^2(2 + |u|^2) - |u|^2 \sigma_0^2(1 + 2f)] \end{aligned}$$

Usando queste definizioni, l'equazione di Fokker–Planck (2.20) diventa

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} W(u, \bar{u}) = [(\partial_u u + \partial_{\bar{u}} \bar{u})a(|u|^2) + \partial_{u\bar{u}}^2 c(|u|^2) + (\partial_{uu}^2 u^2 + \partial_{\bar{u}\bar{u}}^2 \bar{u}^2)b(|u|^2)] W(u, \bar{u})$$

Il passaggio a coordinate polari si ottiene usando le relazioni (facilmente calcolabili)⁸ a partire dalla definizione di r e ϕ)

$$\partial_u u + \partial_{\bar{u}} \bar{u} = 2\partial_r r \tag{2.28}$$

⁸A titolo di esempio se ne ricava una:

$$\partial_u = \partial_u r \partial_r + \partial_u \phi \partial_\phi,$$

$$\begin{aligned}\partial_{u\bar{u}}^2 &= \partial_r r \partial_r + \frac{1}{4} \partial_{\phi\phi}^2 r^{-1} \\ \partial_{uu}^2 u^2 + \partial_{\bar{u}\bar{u}}^2 &= 2\partial_r r \partial_r r + 2\partial_r r - \frac{1}{2} \partial_{\phi\phi}^2\end{aligned}$$

Mediante queste si ottiene l'equazione di Fokker–Planck in coordinate polari⁹

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} W(r, \phi) &= \left[2\partial_r r (a(r) + b(r)) + \right. \\ &\left. + \partial_r r \partial_r (c(r) + 2b(r)r) + \frac{1}{4} \partial_{\phi\phi}^2 \left(\frac{c(r)}{r} - 2b(r) \right) \right] W(r, \phi).\end{aligned}\quad (2.29)$$

La soluzione stazionaria W_{st} si ottiene dall'equazione (2.29) imponendo l'indipendenza dal tempo di W , imponendo cioè $\frac{d}{dt} W = 0$. In questo caso la (2.29) si separa in due equazioni differenziali,

$$\begin{cases} \partial_{\phi\phi}^2 W_{st}(r, \phi) = 0 \\ [2\partial_r r (a + b) + \partial_r r \partial_r (c + 2br)] W_{st}(r, \phi) = 0 \end{cases}$$

La prima è immediatamente risolvibile. Essa infatti implica che $\partial_{\phi} W_{st}$ è costante, ma dalla continuità di W_{st} segue che tale costante è nulla e quindi W_{st} è indipendente da ϕ .

La seconda si risolve per separazione di variabili, ottenendo

$$W_{st}(r) = \frac{1}{\mathcal{N}(c + 2br)} \exp \left[- \int_0^r dr' 2 \frac{a(r') + b(r')}{c(r') + 2r' b(r')} \right], \quad (2.30)$$

dove \mathcal{N} è la costante di integrazione che è determinata dalla condizione di normalizzazione della funzione di Wigner: $\int_0^\infty dr W_{st}(r) = 1$.

dove

$$\begin{cases} u = r^{\frac{1}{2}} e^{i\phi} \\ \bar{u} = r^{\frac{1}{2}} e^{-i\phi} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} r = u\bar{u} \equiv |u|^2 \\ \phi = -\frac{i}{2} \ln\left(\frac{u}{\bar{u}}\right) \end{cases}$$

quindi

$$\partial_u = r^{\frac{1}{2}} e^{-i\phi} \left(\partial_r - \frac{i}{2r} \partial_\phi \right),$$

da cui è immediata la prima delle relazioni (2.28).

⁹È da notare che sia in [2] che in [3] questa equazione è riportata in maniera incompleta. Alcune simulazioni di controllo hanno comunque evidenziato che la parte mancante non sembra essere fisicamente significativa per valori ragionevoli dei parametri del laser.

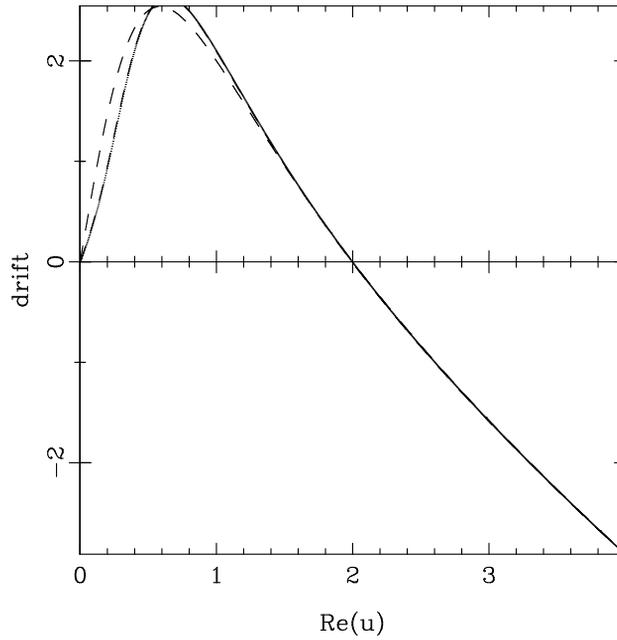


Figura 2.3: Confronto fra il termine di drift $\gamma^{-1}D_u^{\text{Lug}}$ (2.27) ottenuto dalla teoria di L. Lugiato *et al.* [2] (individuato dalla linea tratteggiata) e il termine $\gamma^{-1}D_u^{\text{Haake}}$ (2.18) ottenuto usando la teoria di F. Haake *et al.* [3] (individuato dalla linea continua). I parametri usati in questo caso sono $C = 4.5$; $n_s = N = 55$; $f = 1$; $\sigma_0 = 1$ e sono stati scelti in maniera da soddisfare l'approssimazione adiabatica. Si osservano differenze fra le due teorie per $\text{Re}(u) \simeq 1$. Tali differenze non sono comunque qualitativamente rilevanti.

Capitolo 3

Amplificatori laser.

Lo studio del laser presentato nei capitoli precedenti è finalizzato all'analisi di un amplificatore da inserire in una linea di trasmissione digitale a fibre ottiche. Questo capitolo contiene una breve descrizione dell'amplificatore laser e delle quantità fisiche che lo caratterizzano. Si analizza inoltre la funzione di un amplificatore all'interno di una linea di trasmissione ottica digitale e gli errori connessi con la codifica digitale mediante stati quantistici della radiazione.

Nella prima sezione si introduce l'amplificatore laser e se ne definisce un modello fisico basato sulla equazione di Fokker–Planck introdotta nel capitolo 2. Nella successiva sezione si descrivono i parametri fisici (guadagno, bit error rate e figura di rumore) che caratterizzano una linea di trasmissione. Il capitolo viene concluso introducendo l'amplificatore ottico lineare, dando particolare risalto al *phase insensitive* ideale, che nel corso della presente tesi verrà usato come termine di paragone per lo studio dell'amplificatore saturabile.

3.1 Modello di rete digitale a fibre ottiche: definizioni e condizioni di validità.

In una rete a fibre ottiche, la trasmissione dei dati avviene mediante impulsi luminosi. Tale trasmissione viene descritta mediante tre successivi passi distinti: **la codifica, l'amplificazione, e la rivelazione**. Qui si trascureranno i meccanismi di dissipazione che possono essere presenti lungo la fibra.

Si vuole infatti studiare solo il rumore quantistico intrinseco nel processo descritto, a prescindere dal rumore aggiunto dai termini di dissipazione dovuti alla fibra che in linea di principio si può sempre ridurre o eliminare. Conviene comunque evidenziare sin da ora che un amplificatore in una linea in cui non c'è dissipazione, non può che peggiorare la bit error rate. È in grado di migliorare la bit error rate della linea solo nella misura in cui esso contrasta i fenomeni di dissipazione “ricostruendo” il segnale.

La codifica: In una linea di trasmissione digitale le informazioni viaggiano sotto forma di numeri in base binaria, descritti cioè da cifre, dette *bit*, che possono assumere valore zero o uno. È necessario, pertanto, utilizzare due distinti segnali in maniera da poter codificare il bit uno e il bit zero. Nel caso di una linea ottica la codifica avviene utilizzando stati quantistici distinti relativi ad un modo della radiazione. Le codifiche che verranno qui presentate si basano su stati numero oppure stati coerenti: il bit zero viene codificato mediante lo stato di vuoto $|0\rangle$, mentre il bit uno è codificato mediante lo stato coerente $|\alpha\rangle$, oppure lo stato numero $|n\rangle$. Nelle simulazioni effettuate si utilizzano per lo più stati coerenti, che offrono il vantaggio di descrivere più realisticamente il segnale che passa attraverso una fibra ottica.

Si suppone che la distanza di tempo tra la codifica di un segnale e il successivo sia abbastanza grande da poter discriminare i segnali distinti senza errori, cioè si suppone che ad ogni istante di tempo sia presente un solo stato della radiazione nella fibra.

L'amplificazione: I processi di dissipazione o la necessità di suddividere il segnale ottico su più diramazioni della rete richiedono un'amplificazione del segnale indebolito. Questa, all'interno di una fibra ottica, convenzionalmente avviene dopo aver tradotto i segnali ottici in impulsi elettrici. Questi impulsi vengono amplificati e filtrati mediante dispositivi elettronici e poi vengono nuovamente tradotti in segnali luminosi. Tale processo limita la banda passante della rete a quella dei dispositivi utilizzati: la capacità di trasmissione di informazione lungo la rete è fortemente sottoutilizzata a causa del collo di bottiglia costituito dagli amplificatori elettronici.

Negli ultimi anni si vanno diffondendo gli amplificatori ottici ad onda viaggiante (detti anche *TWOA: Traveling wave optical amplifiers*). I *TWOA*

sono costituiti da una sezione di fibra opportunamente drogata in cui si crea un'inversione di popolazione mediante pompaggio ottico. Essi si comportano come un laser con specchi ad alta trasmittanza. Il segnale in ingresso viene amplificato e filtrato senza che avvenga la traduzione in impulsi elettronici, grazie al meccanismo dell'emissione stimolata.

Il *modello di amplificatore* che si utilizzerà si basa sulle equazioni introdotte nel capitolo 2: la dinamica è descritta dalla master equation (2.9) che verrà simulata al computer (cfr. paragrafo 4.1) mediante l'equazione di Fokker–Planck (2.20) [3]. I parametri indipendenti su cui è possibile interagire per specificarne le caratteristiche sono pertanto sei: C parametro di cooperazione, σ_0 parametro di inversione di popolazione non saturata, N numero di atomi che laserano, γ rate di decadimento della cavità ottica, $f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma_{\parallel}}{2\gamma_{\perp}}$ e $n_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}}{4g^2}$ numero di fotoni di saturazione. I sei parametri sono indipendenti, ma l'approssimazione adiabatica (senza la quale l'equazione di Fokker–Planck è inconsistente: cfr. paragrafo 2.1) introduce un vincolo di disuguaglianza sui parametri. L'approssimazione adiabatica richiede che siano soddisfatte le disequazioni

$$\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma}, \frac{g}{\gamma}, \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma} \gg 1,$$

cosa che esprime il fatto che le variabili atomiche sono le variabili veloci in confronto alle variabili di campo (cfr. paragrafo 2.2 dove si introduce il modello del laser). Questo implica che

$$\frac{N}{n_s} \ll 4C,$$

per cui il numero N di atomi che laserano deve essere dell'ordine del numero di fotoni di saturazione n_s o minore, dato che il parametro di cooperazione C è solitamente dell'ordine di $1 \div 10$ (ma è anche possibile avere valori maggiori). Se si utilizza l'equazione di Fokker–Planck di Lugiato *et al.* [2] in cui il coefficiente di drift è dato dalla (2.27), non è necessario specificare il parametro N , che non vi compare. Oltre ai parametri presenti nell'equazione della dinamica, è possibile anche variare il tempo massimo fino a cui la radiazione nel laser viene fatta evolvere, cioè il tempo a cui si dà la soluzione della (2.20). Questo fisicamente indica il periodo in cui la radiazione rimane nella cavità laser e può essere messo in relazione con la lunghezza della cavità. È necessario, però, anche introdurre i vincoli trovati nel paragrafo 2.1: il tempo

a cui si ricava la soluzione deve essere molto maggiore del tempo di traccia t_* , che è il periodo dopo cui raggiunge lo stato stazionario adiabatico in cui gli atomi (variabili veloci) sono in equilibrio con la radiazione (variabile lenta). In questo caso $t_* \simeq \frac{1}{\gamma_{\parallel}}, \frac{1}{\gamma_{\perp}}$. Questo implica la condizione

$$\gamma t \gg \frac{\gamma}{\gamma_{\perp}}, \frac{\gamma}{\gamma_{\parallel}},$$

cioè

$$\frac{1}{\gamma t} \ll \frac{4n_s C}{N}, \frac{2n_s C}{fN}.$$

I segnali in ingresso all'amplificatore vengono simulati inserendoli come condizioni iniziali nell'equazione differenziale di Fokker–Planck, come descritto nel paragrafo 2.4.

L'equazione (2.20) utilizzata per la simulazione proviene da una teoria abbastanza completa ed è in grado di predire una vasta gamma di fenomeni. In particolare, viene trattato in maniera molto accurata il funzionamento del laser in condizioni di saturazione, cioè nella condizione in cui il numero medio di fotoni in cavità è paragonabile o maggiore al numero di fotoni di saturazione n_s . D'altra parte il principale difetto del modello utilizzato consiste nel fatto che esso descrive solamente i due livelli atomici che laserano. Per descrivere una inversione di popolazione in maniera quantistica sarebbe necessaria una descrizione in cui si considerino per lo meno tre livelli. L'inversione di popolazione viene qui imposta in maniera fenomenologica mediante il parametro σ_0 . Si descrive pertanto un'inversione costante lungo la fibra, senza tener conto di eventuali fenomeni di svuotamento del modo di pompa che ci si aspetta per emissioni elevate.

Lo scopo di questa tesi è lo studio della riduzione del rumore e degli errori di trasmissione nelle reti digitali ottiche utilizzando amplificatori laser che lavorano in regime di saturazione.

Si vuole, cioè, vedere se è possibile ridurre gli errori di comunicazione che nascono dalla natura quantistica dei fenomeni in gioco, mediante l'utilizzo degli effetti della saturazione nell'amplificatore. Questi sono in grado di ridurre drasticamente la figura di rumore dell'amplificatore laser, in particolari condizioni [1].

Dopo aver appurato che la figura di rumore definita nel paragrafo 3.2 è, in presenza di saturazione, poco significativa per descrivere gli errori e il rumore di una linea di trasmissione digitale, si procederà allo studio della *bit error rate* definita nel paragrafo 3.2, quantità più adatta a tale scopo.

Riassumendo il modello di amplificatore laser utilizzato in questa tesi è individuato dall'equazione della dinamica del laser (2.20), risolta con la condizione iniziale (2.25) di stato di vuoto se si vuole amplificare il segnale di bit zero, e la condizione iniziale (2.26) di stato coerente oppure (2.23) di stato numero se si vuole amplificare il bit uno. La scelta della condizione iniziale è determinata dalla scelta della codifica, che può essere a stati numero o coerenti.

La rivelazione: Quando il segnale trasmesso raggiunge l'utente a cui è destinato, è necessario decodificarlo, cioè trasformare gli stati della radiazione in arrivo in sequenze di zeri e uni. La decodifica di cui si tratterà nella presente tesi si basa sulla *rivelazione diretta* o a numero di fotoni, in cui l'osservabile quantistico misurato è l'operatore numero di fotoni

$$\hat{n} \stackrel{def}{=} \hat{a}^+ \hat{a}$$

(dove \hat{a} è il l'operatore di distruzione relativo al modo della radiazione nella fibra, modo che si utilizza per la trasmissione). È pertanto necessario proiettare gli stati in uscita dall'amplificatore sulla base $|n\rangle$ degli autostati dell'operatore numero, in modo da ricavare le distribuzioni di probabilità quantistiche relative al risultato di ciascuna misura. Solitamente gli stati in uscita descrittivi il bit zero e il bit uno sono associati a distribuzioni di probabilità che si sovrappongono in parte. Ovviamente, a causa della sovrapposizione tra le distribuzioni, usando questo procedimento c'è la possibilità di decodificare un bit uno quando era stato codificato un bit zero e viceversa: vedi figura 3.1.

La bit error rate è la probabilità che un tale evento si verifichi. Come descritto nel paragrafo 3.2, è necessario ottimizzare il procedimento di decodifica in maniera da rendere minima tale probabilità. Per segnali fortemente quantistici (i.e. a basso numero medio di fotoni) non è mai possibile ridurre eccessivamente la bit error rate, e quindi saranno sempre presenti errori

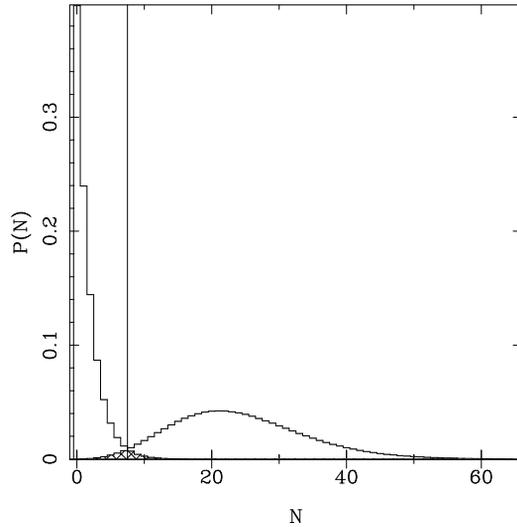


Figura 3.1: Gli istogrammi in figura sono le distribuzioni di probabilità relative a una misura diretta (i.e. dell'operatore numero \hat{n}) degli stati in uscita dalla fibra. La distribuzione a sinistra è quella relativa allo stato di bit zero, l'altra è quella relativa al bit uno. Le due distribuzioni si sovrappongono in parte e quindi c'è una probabilità non nulla di compiere errori di interpretazione (la bit error rate: individuata dall'area tratteggiata). La soglia (la linea verticale) è ottimizzata in maniera da rendere minima tale probabilità. La figura si riferisce ad un amplificatore PIA (cfr. paragrafo 3.4) che amplifica uno stato coerente $|\alpha\rangle$ con $\alpha = 2.7$ in maniera da avere un guadagno finale di 4 db.

di interpretazione. Essi andranno corretti mediante opportuni accorgimenti software o hardware. Questo implica l'invio attraverso la rete di segnali di controllo, che riducono la banda passante effettiva della trasmissione di dati. È conveniente quindi ridurre il più possibile la bit error rate mediante l'utilizzo di appositi amplificatori.

3.2 Caratteristiche dell'amplificatore.

In questo paragrafo si analizzano le tre quantità che caratterizzano la linea di trasmissione contenente l'amplificatore: **il guadagno, la figura di rumore e la bit error rate**. Conviene evidenziare sin da ora che queste tre quantità non dipendono solamente dal tipo di amplificatore introdotto nella linea, bensì anche dal tipo di codifica e di rivelazione utilizzati.

Guadagno: Il guadagno è il rapporto tra il segnale in uscita e quello in ingresso

$$\mathcal{G} \stackrel{def}{=} \frac{\mathcal{S}_{out}}{\mathcal{S}_{in}}, \quad (3.1)$$

dove \mathcal{S}_{out} è il segnale in uscita dalla fibra e \mathcal{S}_{in} è quello in ingresso. Nel caso della linea qui utilizzata (digitale a rivelazione diretta) il segnale è definito come

$$\mathcal{S} \stackrel{def}{=} \langle \hat{n}_{\text{bit } 1} \rangle - \langle \hat{n}_{\text{bit } 0} \rangle,$$

cioè è la differenza tra il valore di aspettazione del numero di fotoni del segnale relativo al bit uno e quello relativo al bit zero: la distanza tra i valori medi delle due distribuzioni di probabilità.

Bit error rate: L'uso della rivelazione diretta impone che lo stato uscita dalla fibra vada proiettato sugli autostati $|n\rangle$ dell'operatore numero, per ottenere le distribuzioni di probabilità relative alla misura degli stati associati al bit zero e al bit uno. Come già anticipato, esse solitamente si sovrappongono e, se la misura fornisce un risultato che cade nella zona di sovrapposizione, non è possibile sapere se il risultato ottenuto si riferisce ad uno stato relativo ad un segnale di bit uno oppure di bit zero. La procedura necessaria per discriminare i segnali ricevuti consiste nell'introduzione di una soglia. Se la misura fornisce un valore superiore a questa soglia, si assume di aver misurato un bit uno, e viceversa se il risultato è minore, si assume di aver ottenuto un bit zero. Questo naturalmente lascia aperta la possibilità di compiere errori di interpretazione. La probabilità che tale evento si verifichi è detta bit error

rate ed è definita ¹ come

$$\mathcal{B}_k \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^k P_1(n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} P_0(n), \quad (3.2)$$

dove $P_{1,0}(n)$ è la probabilità di misurare n fotoni quando in uscita si ha lo stato relativo rispettivamente al bit uno e al bit zero. La bit error rate è quindi la probabilità di rilevare un bit uno quando era stato codificato un bit zero più la probabilità di rilevare un bit zero quando era stato codificato un bit uno, ovvero la probabilità di commettere un errore nell'interpretazione del segnale in arrivo. È il parametro che esprime la rumorosità della linea di amplificazione digitale e dà una misura degli errori di interpretazione compiuti dal rivelatore, errori dovuti ai processi intrinseci della trasmissione del segnale.

La bit error rate dipende dalla soglia k che si utilizza per la rilevazione. Per ridurre il più possibile la probabilità di errore nella linea di trasmissione è necessario ottimizzare la soglia in maniera da rendere minima la quantità \mathcal{B}_k . Il \mathcal{B}_k calcolato sostituendo al k la soglia ottimizzata ottenuta (il \mathcal{B}_k minimo tra quelli che si ottengono al variare del parametro k) è detto bit error rate ottimizzato \mathcal{B} ed è quello che si utilizzerà nel corso di questa tesi.

Figura di rumore: Per definire la figura di rumore \mathcal{R} si introduce il rumore \mathcal{N} , che per modulazione digitale (si assume uguale probabilità a priori di trasmissione di un bit zero e di un bit uno) e rivelazione diretta, assume la forma

$$\mathcal{N} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} (\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle_{\text{bit } 1} + \langle \Delta \hat{n}^2 \rangle_{\text{bit } 0}),$$

dove $\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle \stackrel{def}{=} \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2$ indica le fluttuazioni quantistiche dell'operatore numero sullo stato considerato. La figura di rumore è definita come

$$\mathcal{R} \stackrel{def}{=} \frac{1}{\mathcal{G}^2} \frac{\mathcal{N}_{out}}{\mathcal{N}_{in}} \equiv \frac{(\mathcal{S}^2/\mathcal{N})_{in}}{(\mathcal{S}^2/\mathcal{N})_{out}}, \quad (3.3)$$

¹In realtà è più corretto inserire nella definizione le probabilità a priori dei due eventi. Nel caso del canale binario si ha probabilità a priori di $\frac{1}{2}$ di trasmissione di un bit 0 o di un bit 1. La seguente definizione andrebbe quindi, a rigore, moltiplicata per $\frac{1}{2}$. Nel caso generale la probabilità di interpretare un bit 0 con un bit 1 andrà moltiplicata per la probabilità a priori di trasmissione di un bit 0 e viceversa.

dove G è il guadagno, \mathcal{N}_{in} è il rumore considerato all'ingresso nella fibra e \mathcal{N}_{out} all'uscita. \mathcal{R} dà una misura della degradazione del rapporto segnale–disturbo ($\mathcal{S}^2/\mathcal{N}$) tra l'ingresso e l'uscita della fibra.

Nel corso degli studi compiuti per la presente tesi si è rilevato che la figura di rumore \mathcal{R} non è un parametro molto significativo per caratterizzare gli amplificatori digitali saturabili. In questa definizione, infatti, si fa uso solamente dei primi due momenti della distribuzione ($\langle \hat{n} \rangle$ e $\langle \hat{n}^2 \rangle$). Per caratterizzare amplificatori che tra l'ingresso e l'uscita modificano notevolmente la forma della distribuzione di probabilità, quali gli amplificatori saturabili, è necessario utilizzare anche i momenti successivi. Qualitativamente l'amplificatore saturabile tende a tagliare la coda destra della distribuzione (i.e. quella relativa ad un alto numero di fotoni) e ad accrescere la coda sinistra (dove la saturazione produce effetti minori). Per questo motivo è possibile avere figure di rumore molto basse (grazie al fatto che la distribuzione relativa al bit uno è molto stretta, perchè tagliata), pur avendo una grossa sovrapposizione tra le distribuzioni, e quindi una alta bit error rate. I risultati ottenuti indicano che, nel confronto fra amplificatori diversi, amplificatori con figure di rumore migliori (addirittura anche inferiori a uno) possono avere bit error rates peggiori, e rivelarsi pertanto amplificatori non buoni.

In conclusione la figura di rumore è significativa solo nella misura in cui si confrontano amplificatori che trasformano le distribuzioni di probabilità in ingresso allo stesso modo.

3.3 Amplificatori lineari.

Prima di specializzare lo studio al modello di amplificatore laser introdotto nel paragrafo 3.1, conviene dare una panoramica generale sugli amplificatori lineari in meccanica quantistica e in particolare sugli amplificatori PIA (*phase insensitive amplifiers*), che verranno usati come termine di paragone nello studio di quelli saturabili.

Un amplificatore lineare trasforma un segnale in ingresso, rappresentato dal valor medio di un osservabile \hat{o} , in un segnale di uscita rappresentato dal valor medio dell'osservabile \hat{O} . Nel caso degli amplificatori ottici che tratteremo, si ha

$$\hat{o} = \hat{a}^+ \hat{a} ; \hat{O} = \hat{A}^+ \hat{A},$$

dove \hat{a} e \hat{A} rappresentano rispettivamente i modi della radiazione elettromagnetica all'ingresso e all'uscita dell'amplificatore. Essi devono pertanto soddisfare alle relazioni di commutazione bosoniche

$$[\hat{A}, \hat{A}^+] = 1 ; [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1. \quad (3.4)$$

Un generico amplificatore produce la seguente trasformazione tra segnale (i.e. valor medio dell'osservabile) in ingresso e in uscita

$$\langle \hat{O} \rangle = G \langle \hat{o} \rangle + \text{costante} \quad \text{con } G > 1. \quad (3.5)$$

Le regole di commutazione (3.4) escludono la possibilità di descrivere l'amplificazione con una relazione tra i modi del campo

$$\hat{A} = G^{\frac{1}{2}} \hat{a}, \quad (3.6)$$

che porterebbe a una relazione di commutazione del tipo $[\hat{A}, \hat{A}^+] = G$. È necessario introdurre nella (3.6) un nuovo operatore di campo \hat{b} , detto *modo idler dell'amplificatore*, che soddisfi alle relazione di commutazione bosoniche e che commuti con \hat{a} . Solo in questo modo è possibile recuperare le relazioni di commutazione su \hat{A} . Conservando la linearità delle relazioni che legano \hat{A} e \hat{a} , si ottengono le seguenti leggi di trasformazione possibili

$$\hat{A} = m\hat{a} + n\hat{b} ; \hat{A} = \mu\hat{a} + \nu\hat{b}^+, \quad (3.7)$$

a cui va aggiunta la condizione

$$[\hat{A}, \hat{A}^+] = 1.$$

Quest'ultima implica che

$$|m|^2 + |n|^2 = |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1.$$

La prima delle (3.7) descrive un processo di attenuazione, dato che $|m|^2 \leq 1$, mentre è la seconda a descrivere un processo di amplificazione, dato che $|\mu|^2 \geq 1$. La relazione che lega fra loro i valori medi di ingresso e uscita è, tenendo conto dell'idler

$$\langle \hat{A}^+ \hat{A} \rangle = |\mu|^2 \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle + |\nu|^2 (\langle \hat{b}^+ \hat{b} \rangle - 1),$$

quindi la (3.5), una volta posto $G = \mu$ ⁽²⁾ diventa

$$\langle \hat{A}^+ \hat{A} \rangle = G \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle + (G - 1) (\langle \hat{b}^+ \hat{b} \rangle + 1). \quad (3.8)$$

Si osservi che da questa relazione segue che si ha un segnale in uscita anche se non c'è segnale in ingresso e se l'idler è nel vuoto. Questo fenomeno è detto *amplificazione spontanea parametrica*, in quanto è legato all'amplificazione del modo idler nello stato di vuoto. Il \hat{b} fornisce contributi anche per quanto riguarda momenti di ordine superiore al primo.

Il modo idler \hat{b} è responsabile di rumore aggiunto all'amplificatore di natura quantistica e dipende dai tipo di amplificazione. Nel caso dell'amplificatore laser il modo idler non è un modo \hat{b} della radiazione elettromagnetica, bensì è rappresentato dagli operatori di atomo $\hat{\sigma}_-$, $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_z$.

La trasformazione (3.7) tra i modi di ingresso e uscita del campo è una trasformazione unitaria, e può essere descritta mediante l'operatore di evoluzione unitaria \hat{U} :

$$\hat{A} = \hat{U}^+ \hat{a} \hat{U}, \quad (3.9)$$

dove

$$\hat{U} \stackrel{def}{=} \exp \left[\text{arc th} \left(\sqrt{\frac{G-1}{G}} \right) (\hat{a}^+ \hat{b}^+ - \hat{a} \hat{b}) \right],$$

con

$$\text{arc th}(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

3.4 Amplificatori PIA.

Come già anticipato si utilizzeranno i PIA (*phase insensitive amplifiers*) come termine di paragone per valutare la bontà dell'amplificatore laser saturabile.

Prima di introdurre il PIA è necessario definire la *quadratura del campo* \hat{a}_ϕ , che è la seguente combinazione degli operatori di creazione e distruzione del campo

$$\hat{a}_\phi \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} (\hat{a} e^{-i\phi} + \hat{a}^+ e^{i\phi}).$$

² μ e ν sono in generale coefficienti complessi. È possibile limitarsi a considerare il caso di μ e ν reali a condizione di inglobare la loro fase nella definizione dei modi \hat{a} e \hat{b} , che sono definiti a meno di una fase arbitraria.

Il PIA per definizione amplifica qualunque quadratura in maniera indipendente dal parametro ϕ .

L'amplificatore PIA è descritto dall'hamiltoniana

$$\hat{H} = k(\hat{a}^+\hat{b}^+\hat{c} + \hat{a}\hat{b}\hat{c}^+),$$

dove \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} sono modi della radiazione elettromagnetica. Il modo \hat{a} descrive il segnale di ingresso, il modo \hat{b} descrive l'idler dell'amplificatore, il modo \hat{c} è il modo di pompa necessario per la conservazione dell'energia. È caratterizzato infatti da una frequenza ω_c , tale che

$$\omega_c = \omega_a + \omega_b,$$

dove ω_a e ω_b sono rispettivamente le frequenze del modo \hat{a} e del modo \hat{b} . A partire da questa hamiltoniana si ottiene effettivamente l'operatore unitario \hat{U} definito dalla (3.9) a condizione che \hat{c} sia costante in intensità durante il processo di amplificazione, e possa essere sostituito con il suo autovalore. Questo avviene se \hat{c} è inizialmente in uno stato coerente molto eccitato e quindi non risente della perdita dovuta alla creazioni di fotoni di tipo \hat{a} e \hat{b} .

Guadagno del PIA: Il guadagno si ottiene a partire dall'amplificazione del valore medio del segnale in ingresso dato dalla (3.8):

$$\langle \hat{n}_A \rangle = G\langle \hat{n}_a \rangle + (G - 1)\langle \hat{n}_b + 1 \rangle,$$

dove $\hat{n}_a \stackrel{def}{=} \hat{a}^+\hat{a}$, $\hat{n}_b \stackrel{def}{=} \hat{b}^+\hat{b}$ e $\hat{n}_A \stackrel{def}{=} \hat{A}^+\hat{A}$. Il secondo termine è detto *amplificazione spontanea parametrica*. Usando questa relazione si verifica immediatamente che il guadagno \mathcal{G} del PIA è dato dal parametro G (nel caso in cui il bit zero venga codificato con uno stato di vuoto $|0\rangle$):

$$\mathcal{G} \stackrel{def}{=} \frac{\mathcal{S}_{out}}{\mathcal{S}_{in}} = \frac{G\langle \hat{n}_a \rangle + (G - 1)\langle \hat{n}_b + 1 \rangle - (G - 1)\langle \hat{n}_b + 1 \rangle}{\langle \hat{n}_a \rangle} = G.$$

Bit error rate per il PIA: Per ottenere la bit error rate nel caso di rivelazione diretta è necessario ottenere le distribuzioni di probabilità nel numero

di fotoni $P_0(n)$ e $P_1(n)$ dello stato relativo al bit zero e al bit uno. Le distribuzioni si ottengono a partire dalla matrice densità di sistema evoluta dall'operatore unitario \hat{U} definito con (3.9) e tracciata sui gradi di libertà dell'idler (in quanto per la probabilità finale non ha rilevanza lo stato finale dell'idler):

$$\hat{\rho}_{out} = \text{Tr}_b[\hat{U}\hat{\rho}_{in} \otimes |0\rangle\langle 0|\hat{U}^+], \quad (3.10)$$

dove si è posto l'idler inizialmente nello stato di vuoto $|0\rangle\langle 0|$. Tali distribuzioni risulteranno differenti se si codifica il bit uno mediante stati coerenti o mediante stati numero. In questa sezione si analizzeranno separatamente i due casi, facendo uso delle relazioni 8.13.1 di [9], ricavate a partire dalla teoria dei gruppi.

1. *Codifica a stati numero $|n\rangle$* : A partire dalla (3.10) in cui si introduce un segnale di ingresso in stato numero $\hat{\rho}_{in} = |m\rangle\langle m|$, si ottiene

$$\hat{\rho}_{out} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!m!} \frac{(|\mathcal{G}|^2 - 1)^n}{|\mathcal{G}|^2} |\mathcal{G}|^{-2(n+m)} |n+m\rangle\langle n+m|.$$

A partire da questa è immediato ottenere la distribuzione di probabilità nella misura dell'operatore numero:

$$P(n) = \langle n|\hat{\rho}_{out}|n\rangle = \begin{cases} \frac{(|\mathcal{G}|^2 - 1)^{n-m}}{|\mathcal{G}|^{2(n+1)}} \frac{n!}{(n-m)!m!} & \text{per } n \geq m \\ 0 & \text{per } n < m \end{cases}.$$

La probabilità in uscita per bit zero in ingresso, codificato con lo stato di vuoto si ottiene ponendo $m = 0$,

$$P_0(n) = \frac{(|\mathcal{G}|^2 - 1)^n}{|\mathcal{G}|^{2(n+1)}},$$

Poichè la distribuzione $P_0(n)$ è monotona decrescente mentre la P_1 ha concavità fissata, la soglia k che minimizza la bit error rate (ovvero l'intersezione tra le due distribuzioni di probabilità) è quella che soddisfa alla relazione

$$P_0(k) = P_1(k) \quad (3.11)$$

Poichè k assume solo valori interi e poichè quasi mai le due distribuzioni hanno un valore identico per un qualche k , è necessario risolvere la

(3.11) cercando il k tale per cui $P_0(k) \geq P_1(k)$ e $P_0(k+1) < P_1(k+1)$. Dato che la probabilità $P_1(n)$ ha forme funzionali diverse per n maggiore del numero di fotoni in ingresso m e per $n \leq m$, è necessario suddividere il calcolo della soglia in due casi distinti:

(a) *Caso di $k \geq m$* : La soglia k è quella tale per cui

$$(|\mathcal{G}|^2 - 1)^k \geq \frac{k!}{(k-m)!m!},$$

e contemporaneamente

$$(|\mathcal{G}|^2 - 1)^{k+1} < \frac{(k+1)!}{(k+1-m)!m!}.$$

(b) *Caso di $k < m$* : La soglia k è quella tale per cui

$$\frac{(|\mathcal{G}|^2 - 1)^k}{|\mathcal{G}|^{2(k+1)}} \geq 0, \quad (3.12)$$

e contemporaneamente

$$\frac{(|\mathcal{G}|^2 - 1)^{(k+1)}}{|\mathcal{G}|^{2(k+2)}} < 0.$$

Si osserva che queste ultime relazioni non ammettono soluzione k in quanto la probabilità P_0 è sempre maggiore di zero. È pertanto necessario che si abbia $k = m - 1$, nel qual caso la seconda delle (3.12) diventa

$$(|\mathcal{G}|^2 - 1)^m < 1,$$

ed è quindi verificata. In conclusione, se la soglia è più piccola del numero di fotoni in ingresso m , allora sarà necessariamente uguale a $m - 1$. Questo è intuitivo in quanto per $n < m$ la probabilità relativa al bit uno è nulla, mentre la probabilità relativa al bit zero è una funzione sempre positiva.

2. *Codifica a stati coerenti $|\alpha\rangle$* : È necessario inserire nella (3.10) un ingresso coerente $\hat{\rho}_{in} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, ottenendo così la seguente matrice densità scritta su una base di autostati dell'operatore numero \hat{n}_a

$$\hat{\rho}_{out} = \sum_{r,s,n=0}^{\infty} \frac{(|\mathcal{G}|^2 - 1)^n}{|\mathcal{G}|^{2n}} \bar{\mathcal{G}}^{-(r+n)} \mathcal{G}^{-(s+n)} \frac{\sqrt{(r+n)!(s+n)!}}{r!s!}.$$

$$\cdot e^{-|\alpha|^2} \alpha^r \bar{\alpha}^s |r+n\rangle \langle n+s|.$$

La distribuzione di probabilità in uscita è pertanto

$$P(n) = \langle n | \hat{\rho}_{out} | n \rangle = \sum_{h=0}^n \frac{(|\mathcal{G}|^2 - 1)^h}{|\mathcal{G}|^{2(n+1)}} \frac{n!}{h![(n-h)!]^2} e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(n-h)}.$$

Per il calcolo della bit error rate minima è necessario il calcolo della soglia, che è eseguito in maniera analoga al caso precedente: la soglia sarà il k tale per cui valgono contemporaneamente le due relazioni

$$P_0(k) \geq P_1(k) ; P_0(k+1) < P_1(k+1).$$

Essa sarà, cioè, il k che soddisfa la relazione

$$(|\mathcal{G}|^2 - 1)^k \geq \sum_{h=0}^k \frac{(|\mathcal{G}|^2 - 1)^h k!}{h![(k-h)!]^2} e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(k-h)},$$

e contemporaneamente la

$$(|\mathcal{G}|^2 - 1)^{(k+1)} < \sum_{h=0}^{k+1} \frac{(|\mathcal{G}|^2 - 1)^h (k+1)!}{h![(k+1-h)!]^2} e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(k+1-h)}.$$

Queste possono essere scritte in maniera più compatta facendo uso del polinomio di Laguerre, definito dalla (2.24)

$$e^{|\alpha|^2} \geq L_k^0 \left(-\frac{|\alpha|^2}{|\mathcal{G}|^2 - 1} \right)$$

e

$$e^{|\alpha|^2} < L_{k+1}^0 \left(-\frac{|\alpha|^2}{|\mathcal{G}|^2 - 1} \right).$$

Una volta calcolate le distribuzioni e la soglia nei due casi di ingresso numero e coerente, è immediato il calcolo della bit error rate a partire dalla definizione (3.2):

$$\mathcal{B} \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^k P_1(n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} P_0(n),$$

Figura di rumore per il PIA: il rumore in uscita da un PIA si ottiene a partire dalla prima delle relazioni (3.7), che permette il calcolo delle quantità in uscita dall'amplificatore e usando la definizione

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2}(\langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle_{\text{bit } 1} + \langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle_{\text{bit } 0}).$$

Per idler in stato di vuoto e codificando il bit zero mediante uno stato di vuoto, si ottiene [6]⁽³⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{out} = \frac{1}{2} & [\mathcal{G} \langle \hat{n}_a \rangle_{\text{bit } 1} + 2(\mathcal{G} - 1) + 2\mathcal{G}(\mathcal{G} - 1) \langle \hat{n}_a \rangle_{\text{bit } 1} + 2(\mathcal{G} - 1)^2 + \\ & + \mathcal{G}^2 \langle \hat{n}_a \rangle_{\text{bit } 1} (\mathcal{F}_{\text{bit } 1} - 1)], \end{aligned}$$

dove \mathcal{F} è il fattore di Fano della distribuzione, definito da

$$\mathcal{F} \stackrel{def}{=} \frac{\langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle}{\langle \hat{n}_a \rangle}.$$

Mentre il rumore per il segnale in ingresso è

$$\mathcal{N}_{in} = \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle_{\text{bit } 1}.$$

Usando questi due è immediato ottenere la figura di rumore

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \frac{1}{\mathcal{G}^2 \langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle_{\text{bit } 1}} & \left[\mathcal{G} \langle \hat{n}_a \rangle_{\text{bit } 1} + 2(\mathcal{G} - 1) + 2\mathcal{G}(\mathcal{G} - 1) \langle \hat{n}_a \rangle_{\text{bit } 1} + \right. \\ & \left. + 2(\mathcal{G} - 1)^2 + \mathcal{G}^2 \langle \hat{n}_a \rangle_{\text{bit } 1} (\mathcal{F}_{\text{bit } 1} - 1) \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

dove $\langle \hat{n}_a \rangle$ e $\langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle$ sono rispettivamente il valore medio e lo scarto quadratico medio della distribuzione dello stato in ingresso.

La simulazione delle equazioni di laser, a partire dal modello introdotto nel paragrafo 3.1 può anche essere eseguita in condizioni di PIA ideale, cioè

³La formula contenuta in questa referenza si riferisce alla linea di trasmissione analogica. La definizione di rumore \mathcal{N} in essa contenuta è pertanto diversa da quella data nella presente tesi che si riferisce a trasmissione digitale.

in condizioni di linearità con l'idler nel vuoto. Questo permette il controllo del funzionamento delle routines di simulazione per il laser saturabile. Il laser saturabile approssima bene il PIA quando il numero di fotoni di saturazione molto elevato $n_s \rightarrow \infty$, cosa che assicura la linearità. Inoltre è necessario scegliere il parametro di cooperazione molto grande $C \rightarrow \infty$ e una totale inversione di popolazione $\sigma_0 = 1$, cosa che assicura l'assenza di fotoni termici, cioè idler in stato di vuoto. In figura 3.2 vengono messe a confronto i due casi. Si osserva un perfetto accordo tra il caso simulato e quello ottenuto analiticamente, con la medesima amplificazione. Questa verifica assicura il buon comportamento delle routines di simulazione in condizioni di lavoro lineare.

3.5 Standard quantum limit.

Il limite standard quantistico (detto anche *standard quantum limit* SQL) è la minima figura di rumore che è possibile ottenere in condizioni di elevati guadagni e intensi stati di ingresso coerenti. Convenzionalmente si prende lo SQL come il limite inferiore per la figura di rumore per amplificatori lineari.

Usando la (3.13) nel caso di stati di ingresso molto intensi $\langle \hat{n}_a \rangle \gg \mathcal{G}$ e per guadagni molto elevati $\mathcal{G} \gg 1$, si ha

$$\mathcal{R} \simeq \frac{2\mathcal{G}^2 \langle \hat{n}_a \rangle}{\mathcal{G}^2 \langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle}$$

Nelle condizioni date la figura di rumore può anche essere minore di 3 decibel se si usano segnali fortemente super-poissoniani, i.e. con fattore di Fano molto grande $\mathcal{F} = \frac{\langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle}{\langle \hat{n}_a \rangle} \gg 1$. Questo caso è però di scarso interesse perchè il segnale risulta molto disturbato in partenza. Per stati di ingresso coerenti, caratterizzati da un fattore di Fano

$$\mathcal{F} = \frac{\langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle}{\langle \hat{n}_a \rangle} = 1,$$

si ha

$$\mathcal{R} \simeq 2 \equiv 3 \text{ db.}$$

Nel corso delle simulazioni eseguite per la presente tesi si lavora spesso in regime quantistico, con pochi fotoni in ingresso. Pertanto capiterà di

ottenere figure di rumore inferiori a tre decibel anche per amplificatori in regime lineare. Ad esempio questo è il caso dell'amplificatore rappresentato in figura 3.2 che ha uno stato di ingresso con $\langle \hat{n}_a \rangle = 6.25$ che, con una amplificazione di 3.32 db fornisce, in condizioni lineari, una figura di rumore di 1.29 db.

Nell'ambito di questa tesi non sarà pertanto opportuno confrontare le figure di rumore che si ottengono dall'amplificatore simulato direttamente con i tre decibel dello standard quantum limit, ma sarà necessario di volta in volta calcolare, mediante la relazione (3.13), la figura di rumore relativa all'amplificatore lineare caratterizzato dallo stesso guadagno.

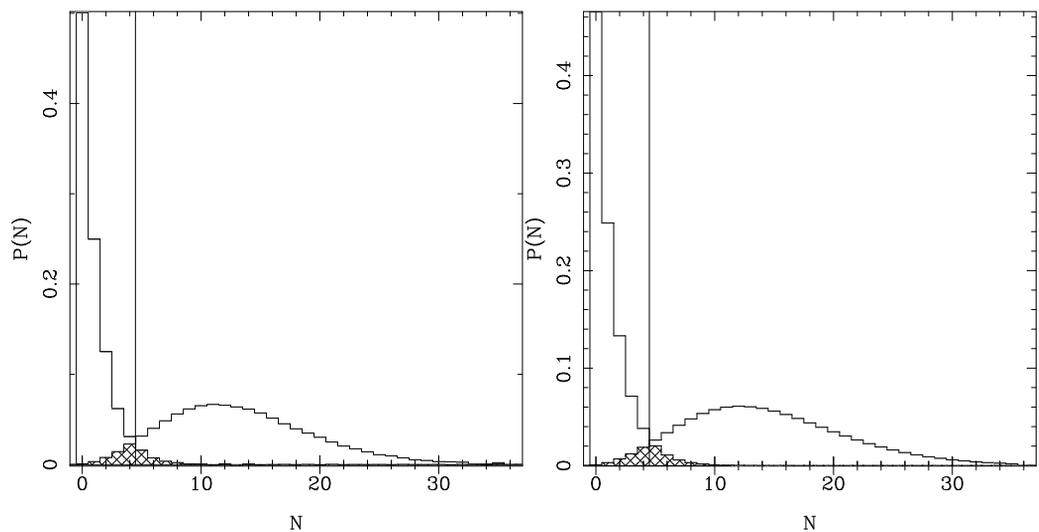


Figura 3.2: Confronto tra il PIA ricavato mediante le routines di simulazione per l'amplificatore saturabile (figura a destra) e il PIA calcolato analiticamente mediante le relazioni introdotte in questo paragrafo (figura a sinistra). La simulazione è stata fatta per un numero molto elevato di storie in modo da ridurre il più possibile gli errori statistici, che in questo grafico non sono apprezzabili. Si nota un perfetto accordo tra i due grafici, cosa che garantisce un buon funzionamento della routine di simulazione se si lavora in condizioni lineari. I parametri dell'amplificatore simulato sono $C = 15000$; $n_s = 10000$; $\sigma_0 = 1$; $t = .12 \cdot 10^{-4}$, per una amplificazione finale di 3.32 db. Si è fatto uso dell'equazione di Fokker-Planck di Lugiato [2].

Capitolo 4

Metodi di Simulazione.

In questo capitolo si descrivono i due metodi di simulazione numerica, che saranno usati per studiare le equazioni che descrivono il laser che sono state introdotte nei capitoli 1 e 2. Entrambi sono basati su tecniche Monte Carlo. Il primo, usato per lo studio dell'equazione Fokker-Planck, simula la funzione di Wigner W e la sua evoluzione. Il secondo, usato per la simulazione della master equation, simula l'evoluzione del vettore di stato del sistema ed è detto metodo del *quantum jump*. Tra i due metodi presentati, viene dato maggior risalto al metodo di simulazione dell'equazione di Fokker-Planck, che è quello utilizzato per le simulazioni del laser. Il metodo del quantum jump viene usato, nell'ambito di questa tesi, solo come metodo di controllo.

Nella prima sezione del capitolo, l'equazione di Fokker-Planck viene integrata per ricavare l'operatore di Green che evolve la funzione di Wigner $W(\vec{u})$ per un intervallino di tempo δt . La funzione $W(\vec{u})$ con ordinamento simmetrico $s = 0$ è una funzione definita positiva e pertanto può essere interpretata come una distribuzione di probabilità sullo spazio \mathfrak{R}^d (con d dimensione del vettore \vec{u}). Il computer simula la distribuzione $W(\vec{u})$ mediante un insieme di punti $\vec{x}_i \in \mathfrak{R}^d$ distribuiti in accordo alla "probabilità" $W(\vec{u})$. L'operatore di Green viene utilizzato per fare evolvere ciascuno dei punti \vec{x}_i fino al tempo t voluto. Si ottiene così l'insieme \vec{x}_i di vettori distribuiti secondo la distribuzione $W(\vec{u})$ al tempo t . Con tecniche di integrazione Monte Carlo si ricavano, a partire da questo insieme, le quantità fisiche di interesse (numero medio di fotoni, figura di rumore dell'amplificatore laser, etc.).

L'intervallo di tempo δt è un parametro critico in quanto introduce un errore sistematico. La teoria, infatti, vale nel limite di $\delta t \rightarrow 0$. È quindi

necessario ripetere tutto il procedimento usando diversi δt e poi compiere un'estrapolazione a $\delta t = 0$.

Nella seconda sezione del capitolo si tratta il metodo del quantum jump. La master equation più generale per un sistema aperto (1.5) contiene una hamiltoniana hermitiana e alcuni superoperatori di Limblad $\mathcal{D}[\hat{c}]$. Gli operatori \hat{c} su cui si basa la loro definizione, se applicati al vettore di stato del sistema, fanno compiere ad esso un “salto” (detto *quantum jump*) sono cioè responsabili di una trasformazione discontinua del vettore di stato. Il metodo del quantum jump simula l'evoluzione dello stato del sistema aperto usando un'equazione di Schrödinger con hamiltoniana non hermitiana costruita utilizzando gli operatori \hat{c} . A causa della non hermiticità della hamiltoniana, il vettore d'onda non conserva la sua norma durante l'evoluzione. Si dimostrerà che “il difetto” di norma del vettore di stato dopo un tempo δt è pari alla probabilità che nel tempo δt sia avvenuto un quantum jump. Pertanto, mentre si fa evolvere il vettore di stato, quando il difetto di norma è sufficientemente grande (più grande di un numero casuale a distribuzione uniforme compreso tra zero e uno), si fa avvenire il quantum jump, riducendo il vettore di stato mediante uno degli operatori \hat{c} e poi normalizzandolo. Il processo descritto viene iterato fino a raggiungere il tempo finale dell'evoluzione.

A causa della natura probabilistica del procedimento, la sua ripetizione conduce a vettori di stato finali diversi, che hanno seguito “storie” diverse. Si dimostrerà che la media di tutti i vettori di stato ottenuti fornisce lo stato che si otterrebbe utilizzando la master equation.

4.1 Simulazione dell'equazione di Fokker-Planck

L'equazione di Fokker-Planck ha la forma generale

$$\frac{d}{dt}W(\vec{u}) = (-\vec{\nabla}_{\vec{u}} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}_{\vec{u}} : \vec{A})W(\vec{u}), \quad (4.1)$$

dove \vec{D} e \vec{A} sono il vettore di drift e la matrice simmetrica di diffusione e \vec{u} è un vettore definito su \mathfrak{R}^d . Nel caso del laser \vec{D} e \vec{A} sono dati da (2.19) ricavata nel capitolo 2 e la dimensione d dello spazio è due.

4.1.1 Funzione di Green per l'equazione di Fokker–Planck

A partire dall'equazione di Fokker–Planck (4.1) si vuole ricavare una funzione di Green G per far evolvere la W :

$$W(\vec{u}; t + \delta t) = \int_{\mathfrak{R}^d} d\vec{u}' W(\vec{u}; t) G(\vec{u}, \vec{u}'; t, t + \delta t).$$

Si consideri inizialmente il caso in cui \vec{D} e \vec{A} sono costanti. Eseguendo una trasformata di Fourier di ambo i membri della (4.1) si ha

$$\frac{d}{dt} \widetilde{W}(\vec{k}, t) = (i\vec{D} \cdot \vec{k} - \frac{1}{2} \vec{k} \cdot \vec{A} \cdot \vec{k}) \widetilde{W}(\vec{k}, t), \quad (4.2)$$

con

$$\widetilde{W}(\vec{k}, t) \stackrel{def}{=} \int_{\mathfrak{R}^d} d\vec{u} W(\vec{u}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{u}}.$$

L'equazione (4.2) così ottenuta ha l'ovvia soluzione

$$\widetilde{W}(\vec{k}, t) = C e^{(-\frac{1}{2} \vec{k} \cdot \vec{A} \cdot \vec{k} + i\vec{D} \cdot \vec{k})t},$$

dove si può specificare la costante di integrazione C utilizzando la condizione iniziale

$$W(\vec{u}; t = 0) = \delta(\vec{u} - \vec{u}') \quad \text{i.e.} \quad \widetilde{W}(\vec{k}; t = 0) \equiv C = e^{i\vec{k} \cdot \vec{u}'}$$

Il risultato dell'equazione di Fokker–Planck per condizione iniziale deltafunzione si ottiene dall'antitrasformata della $\widetilde{W}(\vec{k}, t)$

$$\begin{aligned} W(\vec{u}; t) &= \frac{1}{(2\pi t)^d} \int_{\mathfrak{R}^d} d\vec{k} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{u}} \widetilde{W}(\vec{k}; t) = \\ &= \left(|\vec{A}| (2\pi t)^d \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-(\vec{u}' - \vec{u} + \vec{D}t) \cdot \frac{1}{2t} (\vec{A})^{-1} \cdot (\vec{u}' - \vec{u} + \vec{D}t) \right] \end{aligned}$$

Sostituendo t con un δt , che andrà fatto tendere a zero, la soluzione ottenuta può essere estesa al caso in cui i coefficienti \vec{A} e \vec{D} non sono costanti. In questo caso la $\delta(\vec{u} - \vec{u}')$ viene fatta evolvere nella funzione

$$G(\vec{u}, \vec{u}'; t, t + \delta t) \stackrel{def}{=} \left(|\vec{A}(t)| (2\pi \delta t)^d \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

$$\cdot \exp \left[-(\vec{u}' - \vec{u} + \vec{D}(t)\delta t) \cdot \frac{1}{2\delta t} (\vec{A}(t))^{-1} \cdot (\vec{u}' - \vec{u} + \vec{D}(t)\delta t) \right].$$

Una volta ottenuta l'evoluzione della distribuzione di Dirac $\delta(\vec{u})$, è possibile ricavare l'evoluzione di una qualunque funzione $W(\vec{u}, t)$, esprimendola come convoluzione di distribuzioni $\delta(\vec{u})$. Si utilizza a tale scopo l'identità

$$W(\vec{u}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\vec{u}' \delta(\vec{u} - \vec{u}') W(\vec{u}', t),$$

dove la $W(\vec{u}', t)$ a secondo membro è il coefficiente dello sviluppo. Facendo evolvere per un tempo δt la distribuzione $\delta(\vec{u} - \vec{u}')$ nella funzione di Green, dalla (4.3) si ottiene

$$W(\vec{u}, t + \delta t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\vec{u}' G(\vec{u}, \vec{u}'; t, t + \delta t) W(\vec{u}', t). \quad (4.4)$$

L'evoluzione della W per un intervallo di tempo finito di tempo si ottiene iterando la (4.4). In termini di tempi di calcolo, il metodo Monte Carlo, che sarà descritto nelle successive sezioni, è conveniente già per dimensione $d > 1$. Infatti, come si vedrà in seguito, la convergenza dell'integrazione Monte Carlo è indipendente da d , mentre per gli usuali metodi non-statistici il tempo di convergenza è esponenziale in d .

4.1.2 Simulazione Monte Carlo della dinamica

Come già anticipato, la funzione di Wigner $W(\vec{u}, t)$ con ordinamento simmetrico $s=0$ è definita positiva e può quindi essere interpretata come se fosse una distribuzione di probabilità. Questo permette di utilizzare il metodo Monte Carlo per calcolare integrali in cui sia presente la funzione W .

Metodo Monte Carlo per il calcolo di integrali: Il metodo che verrà presentato consente il calcolo di integrali del tipo

$$I = \int_A d\vec{x} F(\vec{x}) P(\vec{x}); \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^d, A \subset \mathbb{R}^d$$

in cui $P(\vec{x})$, essendo definita positiva, possa essere considerata come una funzione di probabilità. Si scelga un insieme $\{\vec{x}_i\}$ di N punti distribuiti con

probabilità $P(\vec{x}_i)$ ⁽¹⁾, in modo che siano statisticamente scorrelati fra loro e tutti contenuti nella regione di spazio A su cui si deve calcolare l'integrale. Il teorema del limite centrale garantisce che per $N \rightarrow \infty$ si abbia

$$\bar{F} \stackrel{def}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\vec{x}_i) \rightarrow \int_A d\vec{x} F(\vec{x}) P(\vec{x})$$

D'altra parte per N finito e $F(x)$ a quadrato P-sommabile, la media \bar{F} è una variabile statistica distribuita in maniera gaussiana con media \bar{F} e varianza $\frac{\sigma^2}{N}$, dove σ^2 è la varianza della distribuzione $F(\vec{x}_i)$. Quest'ultima quantità non è in genere nota e si approssima con la varianza calcolata dai punti:

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N [F(\vec{x}_i)]^2 - \bar{F}^2 \right) \stackrel{def}{=} \sigma_F^2.$$

L'errore statistico associato alla stima \bar{F} dell'integrale I è pertanto $\epsilon_F \simeq \sqrt{\frac{\sigma_F^2}{N}}$. Aumentando il numero di punti in cui si valuta la funzione F , l'errore diminuisce con un andamento $\frac{1}{\sqrt{N}}$ che è indipendente dalla dimensione d dello spazio su cui la F è definita. Al contrario, a partire da i metodi convenzionali di integrazione (in cui si esegue la cubettatura dello spazio per individuare i punti in cui valutare la funzione integranda) l'errore cresce esponenzialmente al crescere di d .

È necessario, nell'utilizzare la tecnica descritta, controllare che non si abbiano errori dovuti ad una cattiva statistica. Infatti, errori statistici nella valutazione dell'integrale I possono essere introdotti da cause quali una correlazione tra i punti \vec{x}_i oppure un errore nel dominio da cui si scelgono tali punti. Nei calcoli di integrali conviene pertanto verificare che la quantità $F(\vec{x}_i)$ si distribuisca in accordo con una gaussiana di media \bar{F} e varianza σ_F^2 .

La simulazione: La simulazione consiste essenzialmente nell'iterazione della (4.4), dove l'integrale viene calcolato mediante la tecnica Monte Carlo appena descritta, utilizzando un insieme di N punti $\{\vec{u}_i\}$ distribuiti con

¹Per ottenere tale insieme esistono molti algoritmi numerici, fra i quali il più popolare è l'algoritmo di Metropolis [15]

probabilità $P(\vec{u}_i) \equiv W(\vec{u}_i; t)$. La (4.4) diventa quindi

$$W(\vec{u}; t + \delta t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(\vec{u}, \vec{u}_i; t, t + \delta t) = \left(|\vec{A}(t)| (2\pi\delta t)^d \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp[-(\vec{u}_i - \vec{u} + \vec{D}(t)\delta t) \cdot \frac{1}{2\delta t} (\vec{A})^{-1} \cdot (\vec{u}_i - \vec{u} + \vec{D}(t)\delta t)].$$

La $W(\vec{u}, t + \delta t)$ è una somma su i di N gaussiane bidimensionali di valor medio $\vec{\mu}_i = \vec{u}_i + \vec{D}(t)\delta t$ e varianza $\sigma_i^2 = \frac{1}{2\delta t} (\vec{A}(t))^{-1}$. La forma funzionale della W è però poco utile al fine di iterare l'equazione ottenuta. È necessario piuttosto ottenere, a partire dagli N punti $\{\vec{u}_i\}$ distribuiti in accordo con la $W(\vec{u}; t)$, un insieme di N punti $\{\vec{u}'_j\}$ distribuiti in accordo con la $W(\vec{u}'; t + \delta t)$.

Si consideri dapprima il caso in cui la matrice di diffusione è diagonale e la dimensione $d = 2$:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad (\vec{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_y} \end{pmatrix}.$$

Sotto queste ipotesi la $W(\vec{u}, t + \delta t)$ si fattorizza

$$W(\vec{u}, t + \delta t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{\alpha=x,y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta t\lambda_\alpha}} \exp\left[-\frac{[(\vec{u}_i - \vec{u} + \vec{D}(t)\delta t)_\alpha]^2}{2\delta t\lambda_\alpha}\right].$$

Ogni componente i è il prodotto di d gaussiane unidimensionali, individuate dall'indice α , con valore medio

$$\mu_\alpha^{(i)} = (\vec{u}_i - \vec{u} + \vec{D}(t)\delta t)_\alpha$$

e varianza

$$\sigma_\alpha^{(i)} = \sqrt{\delta t\lambda_\alpha}.$$

L'insieme $\{\vec{u}'_j\}$ che descrive la $W(\vec{u}'; t + \delta t)$ si può pertanto simulare a partire da N vettori casuali $\vec{\xi}_j$ con componenti distribuite in modo gaussiano con valore medio nullo e varianza unitaria, moltiplicando ogni componente $(\vec{\xi}_j)_\alpha$ per la varianza $\sigma_\alpha^{(i)}$ e aggiungendo $\mu_\alpha^{(i)}$, ovvero

$$(\vec{u}'_j)_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha\delta t}(\vec{\xi}_j)_\alpha + \delta t(\vec{D}(t))_\alpha + (\vec{u}_j)_\alpha \quad (\alpha = x, y)$$

L'estensione a dimensione $d > 2$ è immediata; l'estensione al caso di matrice \vec{A} di diffusione non diagonale si ottiene introducendo la matrice ortogonale \vec{O} che la diagonalizza:

$$\vec{O} \cdot \vec{A} \cdot {}^t\vec{O} = \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{pmatrix}$$

L'esistenza della matrice \vec{O} è garantita dal fatto che la matrice \vec{A} è simmetrica (cfr. paragrafo 1.2.3). La matrice inversa è

$$(\vec{A})^{-1} = {}^t\vec{O} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_y} \end{pmatrix} \cdot \vec{O}$$

Ci si può ricondurre ora al caso diagonale già analizzato sostituendo nella simulazione al vettore $(\vec{u}_i - \vec{u} + \vec{D}\delta t)$ il vettore $\vec{O} \cdot (\vec{u}_i - \vec{u} + \vec{D}\delta t)$. Si ottiene così la distribuzione

$$(\vec{O} \cdot \vec{u}'_j)_\alpha = (\xi_j)_\alpha \sqrt{\lambda_\alpha \delta t} + (\vec{O} \cdot \vec{D}(t))_\alpha \delta t + (\vec{O} \cdot \vec{u})_\alpha \quad (\alpha = x, y).$$

Da questa, moltiplicando ambo i membri per $\vec{O}^{-1} \equiv {}^t\vec{O}$, si ricava l'insieme $\{\vec{u}'_j\}$ voluto

$$(\vec{u}'_j)_\alpha = ({}^t\vec{O} \cdot \vec{v}_j)_\alpha + (\vec{D}(t))_\alpha \delta t + (\vec{u})_\alpha \quad (\alpha = x, y),$$

dove è stato introdotto il vettore \vec{v}_j , così definito:

$$\vec{v}_j \stackrel{def}{=} \left((\xi_j)_x \sqrt{\lambda_x \delta t}, (\xi_j)_y \sqrt{\lambda_y \delta t} \right).$$

Specializzazione all'equazione di Fokker-Planck del laser.

Il discorso fin qui si riferisce al caso di una generica equazione di Fokker-Planck. Convien ora analizzare in specifico il caso del laser, la cui equazione di Fokker-Planck (2.20) era stata ricavata nel paragrafo 2.3. Detta equazione, usando i coefficienti a, b e c , introdotti nel paragrafo 2.6, si può scrivere come

$$\partial_t W = (\vec{\nabla} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} : \vec{A}) W,$$

dove le componenti della matrice di diffusione \vec{A} sono ²

$$\begin{aligned} a_{xx} &= c(r) + (x^2 - y^2)b(r) \\ a_{yy} &= c(r) - (x^2 - y^2)b(r) \\ a_{xy} &= a_{yx} = 2xyb(r) . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Il calcolo degli autovalori λ_1 e λ_2 di \vec{A} fornisce il risultato immediato

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c(r) + b(r) (x^2 + y^2) \\ \lambda_2 &= c(r) - b(r) (x^2 + y^2) , \end{aligned}$$

mentre gli autovettori normalizzati sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \vec{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (4.6)$$

In conclusione il procedimento descritto permette di ottenere l'insieme di punti $\{\vec{u}_j\}$ distribuiti in accordo con la "probabilità" $W(\vec{u}_j, t)$ a qualunque istante di tempo. È necessario preventivamente assegnare una condizione iniziale alla dinamica nella forma dell'insieme $\{\vec{u}_j(t=0)\}$ distribuito secondo la $W(\vec{u}, t=0)$. Questo può essere costruito mediante l'algoritmo Metropolis che permette di trovare un insieme di punti distribuito in accordo con funzione di probabilità arbitraria, oppure mediante altri algoritmi più specializzati ed efficienti per distribuzioni di probabilità specifiche. Il calcolo della funzione di Wigner $W(\vec{u}, t=0)$ per alcuni stati iniziali nel caso del laser è dato nel paragrafo 2.4.

L'equazione di Fokker-Planck (4.1) è un'equazione di diffusione. Il procedimento descritto in questo paragrafo simula tale equazione diffondendo nel piano i punti $\{\vec{u}_i\}$ che ne individuano la soluzione $W(\vec{u}; t)$. Si può osservare il risultato di tale diffusione, in un esempio pratico, mediante la figura 4.4 dove l'insieme di punti diffuso è graficato nel piano complesso.

²Per comodità inseriamo le seguenti definizioni:

$$u = x + iy, \quad \bar{u} = x - iy, \quad r = |u|^2.$$

4.1.3 Calcolo dei valori medi e relativi errori.

Una volta ottenuta la funzione di Wigner $W(\vec{u}, t)$ descrivente lo stato del sistema al tempo t , è necessario calcolare i valori medi delle osservabili fisiche di interesse. Queste, nel caso di simulazioni di un amplificatore laser, sono il guadagno, la bit error rate e la figura di rumore dell'amplificatore laser, quantità già introdotte nel paragrafo 3.2. Conviene separare la simulazione dell'amplificatore del bit zero da quella del bit uno, riutilizzando gli stessi risultati per il bit zero al variare del segnale in ingresso per il bit uno.

Del bit zero è necessario calcolare la distribuzione di probabilità $P_0(n)$ nel numero di fotoni dello stato quantistico dopo un tempo di amplificazione t . Il valor medio e lo scarto quadratico medio della distribuzione sono calcolati direttamente a partire dalla W , come verrà spiegato in seguito. Non conviene, infatti, calcolare queste quantità a partire dalla distribuzione $P_0(n)$ simulato, in quanto in tal modo si sommano gli errori statistici di simulazione per ogni valore di n .

Del bit uno si calcola, come per il bit zero, la distribuzione di probabilità $P_1(n)$ nel numero di fotoni. In tal modo è possibile il calcolo della *bit error rate* mediante la definizione data nel paragrafo 3.2, una volta ottenuta la soglia ottimale che permetta di discriminare il bit uno e il bit zero. Si ricavano inoltre il valor medio e lo scarto quadratico della distribuzione relativa al bit uno, a partire dai quali è possibile ottenere la figura di rumore e il guadagno dell'amplificatore laser.

Di tutte le osservabili calcolate è necessario valutare anche il relativo errore statistico, introdotto dall'impiego del metodo Monte Carlo.

Si analizza ora in dettaglio il calcolo delle medie introdotte:

1. *Valore medio e scarto quadratico medio della distribuzione di probabilità:* A partire dalla funzione di Wigner $W(\alpha, \bar{\alpha}) \equiv W(\alpha, \bar{\alpha}; s = 0)$ si può ottenere, mediante antitrasformata di Fourier, la funzione generatrice $X(\lambda, \bar{\lambda}) \equiv X(\lambda, \bar{\lambda}; s = 0)$ introdotta nel paragrafo 1.2.1. Da essa si ricavano i momenti della distribuzione nel numero di fotoni, usando l'ultima delle relazioni (1.7). Si ricava in tale modo il valore medio

dell'operatore numero con ordinamento simmetrico

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle \hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+ \rangle &= -\partial_{\lambda\bar{\lambda}}^2 X(\lambda, \bar{\lambda}) \Big|_{\lambda=0, \bar{\lambda}=0} = \\ &= -\partial_{\lambda\bar{\lambda}}^2 \int_{\mathcal{C}} d^2\alpha e^{\lambda\bar{\alpha} - \bar{\lambda}\alpha} W(\alpha, \bar{\alpha}) \Big|_{\lambda=0, \bar{\lambda}=0} = \int_{\mathcal{C}} d^2\alpha \alpha \bar{\alpha} W(\alpha, \bar{\alpha}), \end{aligned}$$

Utilizzando l'identità

$$\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+ = 2\hat{a}^+ \hat{a} + [\hat{a}, \hat{a}^+] = 2\hat{a}^+ \hat{a} + 1,$$

si ottiene

$$\langle \hat{n} \rangle \equiv \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle = \int_{\mathcal{C}} d^2\alpha \alpha \bar{\alpha} W(\alpha, \bar{\alpha}; s=0) - \frac{1}{2}$$

ovvero la media del modulo quadro di α calcolata sulla “distribuzione di probabilità” W fornisce il numero medio di fotoni sommato a un fattore $\frac{1}{2}$.

Il calcolo della media dei quadrati è del tutto analogo. Si parte dalla valutazione della media dell'operatore $(\hat{a}^+)^2 \hat{a}^2$ con ordinamento simmetrico,

$$\frac{1}{2}\langle (\hat{a}^+)^2 \hat{a}^2 + \hat{a}^2 (\hat{a}^+)^2 \rangle = \int_{\mathcal{C}} d^2\alpha \alpha^2 \bar{\alpha}^2 W(\alpha, \bar{\alpha}).$$

Utilizzando l'identità

$$(\hat{a}^+)^2 \hat{a}^2 + \hat{a}^2 (\hat{a}^+)^2 = 2(\hat{a}^+ \hat{a})^2 + 2\hat{a}^+ \hat{a} + 1,$$

si ottiene

$$\langle \hat{n}^2 \rangle \equiv \langle (\hat{a}^+)^2 \hat{a}^2 \rangle = \int_{\mathcal{C}} d^2\alpha \alpha^2 \bar{\alpha}^2 W(\alpha, \bar{\alpha}) - \langle \hat{n} \rangle - \frac{1}{2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{n} \rangle^2 &\equiv \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \\ &= \int_{\mathcal{C}} d^2\alpha \alpha^2 \bar{\alpha}^2 W(\alpha, \bar{\alpha}) - \left[\int_{\mathcal{C}} d^2\alpha \alpha \bar{\alpha} W(\alpha, \bar{\alpha}) \right]^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. *Guadagno e figura di rumore dell'amplificatore:* utilizzando le definizioni (3.1) e (3.3) date nel paragrafo 3.2

$$\mathcal{G} \stackrel{def}{=} \frac{\mathcal{S}_{out}}{\mathcal{S}_{in}} ; \mathcal{R} \stackrel{def}{=} \frac{1}{\mathcal{G}^2} \frac{\mathcal{N}_{out}}{\mathcal{N}_{in}}$$

con

$$\mathcal{S} \stackrel{def}{=} \langle \hat{n}_{\text{bit } 1} \rangle - \langle \hat{n}_{\text{bit } 0} \rangle ; \mathcal{N} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} (\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle_{\text{bit } 1} + \langle \Delta \hat{n}^2 \rangle_{\text{bit } 0}),$$

si possono calcolare il guadagno e la figura di rumore dell'amplificatore a partire dal valore medio e dallo scarto quadratico medio relativi al segnale bit zero e bit uno.

3. *Distribuzione di probabilità:* La distribuzione di probabilità nel numero di fotoni dello stato quantistico al tempo t è costituita dagli elementi diagonali della matrice densità $\hat{\rho}(t)$ del sistema scritta sulla base dell'operatore numero:

$$P(n) = \langle n | \hat{\rho}(t) | n \rangle.$$

L'operatore $\hat{\rho}(t)$ può essere ottenuto dalla funzione di Wigner W mediante l'equazione (1.8),

$$\hat{\rho} = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^2 \lambda}{\pi} \int_{\mathcal{C}} d^2 \beta \quad W(\beta, \bar{\beta}) e^{\lambda \bar{\beta} - \beta \bar{\lambda}} e^{\bar{\lambda} \hat{a} - \lambda \hat{a}^+},$$

che scritta in coordinate polari ($\lambda \stackrel{def}{=} r' \frac{1}{2} e^{i\psi}$; $\beta \stackrel{def}{=} r \frac{1}{2} e^{i\phi}$) diventa

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = \int_0^\infty dr' dr \int_0^{2\pi} \frac{d\phi d\psi}{4\pi^2} W(r, \phi) \exp[\sqrt{r'r}(e^{-i(\phi-\psi)} - e^{i(\phi-\psi)})] \\ \cdot \exp[\sqrt{r'r}(e^{-i\psi} \hat{a} - e^{i\psi} \hat{a}^+)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Mediante la formula di Campbell-Hausdorff, il secondo esponenziale che compare a secondo membro nella (4.7) si può dividere in prodotti di esponenziali:

$$\exp[\sqrt{r'r}(e^{-i\psi} \hat{a} - e^{i\psi} \hat{a}^+)] = e^{-\frac{r'}{2}} e^{-\sqrt{r'r} e^{i\psi} \hat{a}^+} e^{\sqrt{r'r} e^{-i\psi} \hat{a}} \stackrel{def}{=} \hat{D}^+(\sqrt{r'r} e^{i\psi}),$$

dove \hat{D} è l'operatore di spostamento definito come $\hat{D}(\alpha) \stackrel{def}{=} e^{-\bar{\alpha}\hat{a}+\alpha\hat{a}^+}$. L'elemento di matrice di tale operatore si ottiene sviluppando in serie di potenze gli esponenziali, cioè

$$\langle n|\hat{D}^+(\sqrt{r'} e^{i\psi})|n\rangle = e^{-\frac{r'}{2}} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (\sqrt{r'})^{l+k}}{l!k!} e^{i\psi(l-k)} \langle n|(\hat{a}^+)^l \hat{a}^k |n\rangle.$$

Usando le uguaglianze

$$\hat{a}^m |n\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}} |n-m\rangle & \text{per } n \geq m \\ 0 & \text{per } n < m \end{cases}$$

e

$$\langle n-l|n-k\rangle = \delta_{lk} \quad \text{per } l, k \leq n,$$

si ottiene

$$\langle n|\hat{D}^+(\sqrt{r'} e^{i\psi})|n\rangle = e^{-\frac{r'}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k r'^k n!}{(k!)^2 (n-k)!} = e^{-\frac{r'}{2}} L_n^0(r'),$$

dove L_n^0 è il polinomio di Laguerre di ordine n , definito dalla (2.24). Utilizzando la relazione ottenuta e sviluppando in serie il primo esponenziale della (4.7) si ottiene

$$\begin{aligned} & \langle n|\hat{\rho}|n\rangle = \\ & = \int_0^\infty dr' dr \int_0^{2\pi} \frac{d\phi d\psi}{4\pi^2} W(r, \phi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\sqrt{rr'})^m \sin^m(\psi - \phi)}{m!} e^{-\frac{r'}{2}} L_n^0(r'). \end{aligned}$$

Convien ora permutare la serie e l'integrale su ψ , utilizzando la proprietà

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \sin^{2m} \psi = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

e introdurre le funzioni di Bessell

$$J_n(z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}.$$

Si ottiene così

$$\langle n|\hat{\rho}|n\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^\infty dr' dr W(r, \phi) J_0(2\sqrt{rr'}) e^{-\frac{r'}{2}} L_n^0(r').$$

Sfruttando la relazione

$$\int_0^\infty dx x e^{-\frac{x^2}{2}} J_0(2\sqrt{r}x) L_n(x^2) = (-1)^n e^{-2r} L_n(4r),$$

si ottiene infine il risultato cercato per la distribuzione di probabilità

$$\langle n|\hat{\rho}|n\rangle \equiv P(n) = (-1)^n 2 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^\infty dr W(r, \phi) e^{-2r} L_n^0(4r). \quad (4.8)$$

Il calcolo numerico effettivo viene condotto integrando la (4.8) con il metodo Monte Carlo, ovvero

$$\langle n|\hat{\rho}|n\rangle \simeq (-1)^n 2 \sum_j e^{-2r_j} L_n^0(4r_j),$$

dove $\{\alpha_j\}$, con $r_j \stackrel{def}{=} |\alpha_j|^2$, è l'insieme di punti $\in \mathcal{C}$ che simulano la funzione di Wigner $W(\alpha, \bar{\alpha})$. Inoltre il calcolo dei polinomi di Laguerre utilizza la relazione di ricorrenza [28],

$$\begin{cases} L_0^0(x) = 1 ; L_1^0(x) = 1 - x \\ L_{n+1}^0(x) = \frac{1}{n+1} [(2n+1-x)L_n^0(x) - nL_{n-1}^0(x)] \end{cases} .$$

Il calcolo delle distribuzioni di probabilità $P_0(n)$ e $P_1(n)$ associate al bit zero e al bit uno può essere eseguito, grazie alla relazione di ricorrenza data, fino a valori della variabile n pari a $100 \div 200$. Valori superiori conducono a problemi di convergenza numerica nel calcolo dei polinomi di Laguerre L_n^0 . Questo limita il calcolo delle distribuzioni di probabilità e della bit error rate ai regimi quantistici (i.e. a basso numero medio di fotoni) che sono stati analizzati in questa tesi. Questo regime è il più interessante in quanto il basso numero di fotoni coinvolti permette di analizzare il caso di segnali molto deboli. Il calcolo delle $P_{0,1}(n)$ per n più elevati, permetterebbe l'analisi anche per regimi in cui i segnali coinvolti sono elevati, quale ad esempio il caso presentato in [1],[4].

Questa estensione si ottiene facendo uno sviluppo asintotico (per $n \rightarrow \infty$) della (4.8) che permette di ricavare la $P(n)$ a partire dalla funzione di Wigner $W(u, \bar{u}; t)$ scritta in coordinate polari e dal polinomio di Laguerre $L_n^0(x)$:

$$P(n) = (-1)^n 2 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^\infty dr W(r, \phi) e^{-2r} L_n^0(4r).$$

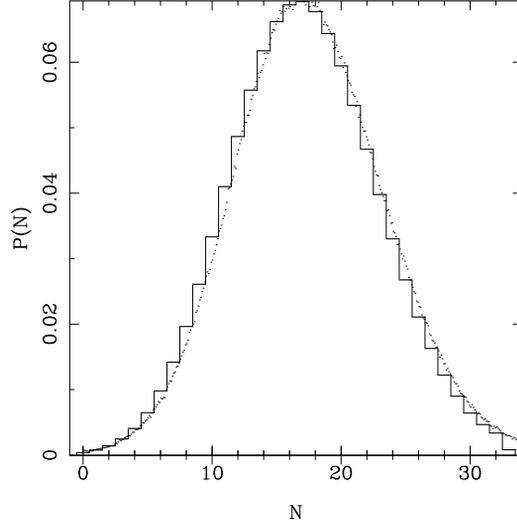


Figura 4.1: Confronto fra la funzione di Wigner mediata sulle fasi \widetilde{W} e la distribuzione nel numero di fotoni $P(n)$. La funzione a gradini è la $P(n)$, mentre i puntini rappresentano un istogramma a 2000 punti della \widetilde{W} . Si noti l'accordo tra la forma funzionale dei due istogrammi. Il confronto è fatto per un laser in condizioni stazionarie con parametri $n_s = 10$; $C = 2.5$; $\sigma_0 = 1$; $\gamma t = 12000$. È stata usata l'equazione di Fokker-Planck di Lugiato.

Si è potuto osservare che per i casi in cui è stato possibile il calcolo della $P(n)$, questa si è rivelata avere una forma funzionale molto vicina a quella della funzione di Wigner, mediata sulle fasi

$$\widetilde{W}(r) \stackrel{def}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} W(r, \phi).$$

Per confrontare la $\widetilde{W}(r)$ con la $P(n)$ è necessario utilizzare la trasformazione $r \stackrel{def}{=} |\alpha|^2 \equiv n$. In figura 4.1 vengono messe a confronto la W e la P per un laser in condizione stazionarie. Si presume, quindi, che lo sviluppo asintotico della P abbia una forma funzionale molto vicina a quella della \widetilde{W} . Lo sviluppo asintotico è in corso di realizzazione.

4. *Bit error rate e soglia*: Una volta note le distribuzioni di probabilità relative al bit zero e al bit uno, si possono calcolare la bit error rate e la soglia, introdotte nel paragrafo 3.2. Per ogni possibile soglia (i.e. a partire da $n = 0$ fino al numero $n = N$ massimo di fotoni per cui si sia calcolata la distribuzione di probabilità) si calcola il bit error rate associato. La soglia cercata sarà quella a cui è associato il bit error rate minimo, cioè il numero k (con $0 \leq k \leq N$) che minimizza la quantità

$$\mathcal{B} = \sum_{n=0}^k P_1(n) + \sum_{n=k+1}^N P_0(n).$$

È necessario verificare che N sia abbastanza grande, almeno maggiore dell' n massimo per cui si abbia sovrapposizione apprezzabile tra le due distribuzioni P_0 e P_1 . Un metodo di verifica semplice ed efficace consiste nel controllo della normalizzazione della P_0 e della P_1 . Questo garantisce che il calcolo della $P(n)$ è stato eseguito fino a n sufficientemente grande. Perdendo in generalità, ma guadagnando in tempo di calcolo, la soglia può anche essere calcolata cercando il punto di intersezione tra la distribuzione del bit zero e quella del bit uno. La soglia trovata in questo modo è quella corretta solo se le due distribuzioni di probabilità P_0 e P_1 hanno un unico massimo (che è il caso più frequente).

Errori statistici: Ciascuna delle quantità calcolate è affetta da un errore statistico introdotto dal metodo Monte Carlo. La valutazione di questo errore richiede che le osservabili siano calcolate più volte a partire da funzioni di Wigner W simulate indipendentemente. L'errore associato ad ogni osservabile è lo **scarto quadratico medio** di tutti risultati ottenuti.

Il teorema del limite centrale assicura che i risultati si distribuiscano in maniera gaussiana. Per il controllo della statistica utilizzata è opportuno verificare che questo avvenga: le routines di simulazione generano l'istogramma dei dati calcolati e ricavano, a partire da questo, il valor medio \bar{F} e la varianza σ_F^2 . Il controllo avviene confrontando l'istogramma con una gaussiana caratterizzata dai parametri \bar{F} e σ_F^2 . In figura 4.2 è riportato, come esempio, un grafico di controllo fra quelli generati dalla routine di simulazione.

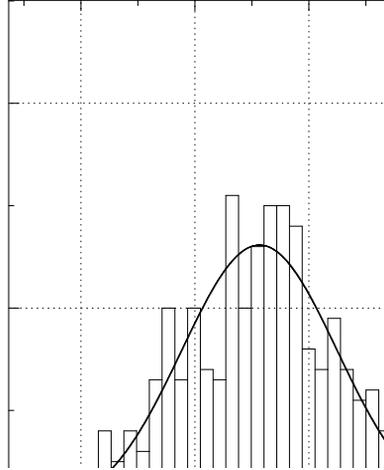


Figura 4.2: Esempio di grafico di controllo per la verifica della statistica. Si osserva che l'istogramma ricavato dalla distribuzione di probabilità ottenuta dai risultati delle simulazioni si accorda con la gaussiana di valore medio \bar{F} e varianza $\sigma_{\bar{F}}^2$. Questo assicura che la statistica utilizzata è buona: non c'è correlazione tra i punti casuali utilizzati per simulare la W e la regione da cui sono stati scelti i punti è ampia abbastanza. L'esempio è tratto da uno dei grafici di controllo per il calcolo della *bit error rate*.

Errori sistematici: Tutte le osservabili calcolate sono affette dall'errore sistematico introdotto dall'uso di un δt finito nel calcolo della funzione di Green (4.3). La teoria è stata sviluppata sotto la condizione $\delta t \rightarrow 0$. È opportuno pertanto calcolare tutte le osservabili utilizzando un certo numero di δt diversi (solitamente si usano tre diversi valori), e poi compiere un'extrapolazione a $\delta t = 0$, fittando tutte le medie calcolate. È necessario verificare che il fit sia fatto correttamente, cioè che la retta di fit cada entro le barre di errore della quantità da fittare e che i punti siano statisticamente allineati. In figura 4.3 è riportato un esempio di grafico di controllo per il fit.

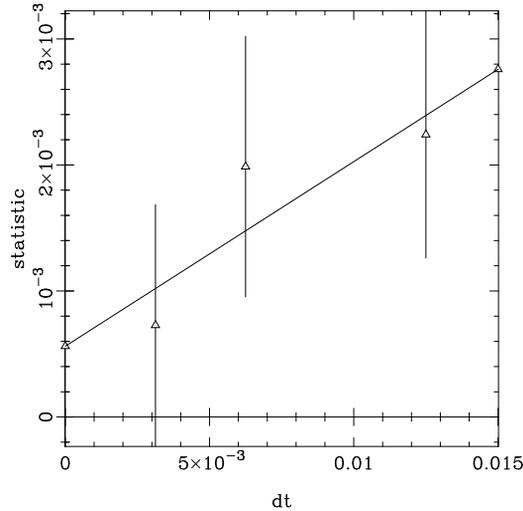


Figura 4.3: Esempio di grafico di controllo per la verifica dell’extrapolazione a $\delta t = 0$. Si osserva che la retta interpolante non cade fuori dalle barre di errore dei valori dell’osservabile calcolato usando tre δt distinti. Il primo punto a sinistra è il valore estrapolato dell’osservabile, l’ultimo punto a destra serve soltanto per tracciare la retta interpolante e non ha significato fisico. È da notare che, nel caso in esame, il δt potrebbe ulteriormente essere allungato (diminuendo così i tempi di calcolo), dato che la retta interpolante passa ampiamente dentro la barra di errore. L’osservabile di cui si vede l’extrapolazione nel grafico è il valore della probabilità $P_0(36)$ di avere 36 fotoni in una misura dello stato quantistico associato al bit zero.

4.1.4 Stato stazionario.

Per ottenere la soluzione stazionaria dell’equazione di Fokker–Planck, è poco conveniente usare il metodo descritto. Sarebbe infatti necessario iterare l’integrale (4.4) per molti *time steps* δt successivi fino a raggiungere un tempo sufficientemente lungo in modo che il sistema vada all’equilibrio con la radiazione. Questo comporta un notevole dispendio in termini di tempo di calcolo. È pertanto conveniente fare uso della proprietà di ergodicità del sistema.

Un sistema si dice ergodico se esiste una regione Ω dello spazio delle fasi che sia finita, invariante (i.e. l’evoluto temporale di un qualunque punto di Ω è ancora un punto di Ω) e che non possa essere divisa in sottoregioni inva-

rianti. Sotto le ipotesi date, vale il teorema ergodico: la media sul tempo di una quantità fisica dipendente dal tempo è indipendente dall'istante iniziale t_0 ed è uguale alla media calcolata nella regione Ω :

$$\bar{O} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt O(x(t)) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} dx O(x).$$

Sulla base dell'ipotesi di ergodicità è sufficiente far evolvere un solo punto del sistema e al posto di calcolare le medie sui punti, si utilizza la media sul tempo di questo singolo punto. La funzione di Wigner $W(u, \bar{u}; t = \infty)$ è quindi rappresentata dall'insieme dei valori che il punto attraversa quando viene fatto evolvere mediante la funzione di Green. In figura 4.4 è rappre-

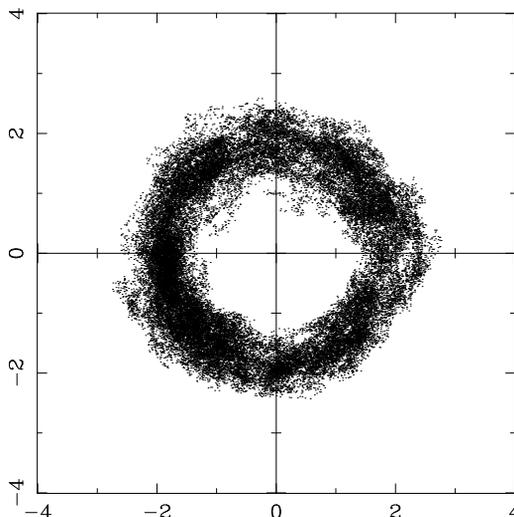


Figura 4.4: Insieme dei punti che rappresentano la funzione di Wigner stazionaria $W(u, \bar{u}; t = \infty)$ ottenuto facendo evolvere fino ad un tempo sufficientemente lungo un unico punto mediante la funzione di Green (4.3). L'omogeneità di tale insieme nello spazio garantisce che il punto è stato fatto evolvere fino ad un tempo finale sufficientemente lungo.

sentato tale insieme che individua la $W(u, \bar{u}; t = \infty)$, ottenuto da uno dei grafici di controllo delle routines di simulazione.

Come già anticipato lo stato stazionario si è rivelato molto utile per la messa a punto delle routines di simulazione, in quanto è possibile fare un confronto con la soluzione stazionaria analitica, ricavata nel paragrafo 2.6. In figura 4.5 vengono messe a confronto la funzione di Wigner simulata e la soluzione analitica, data dalla (2.30).

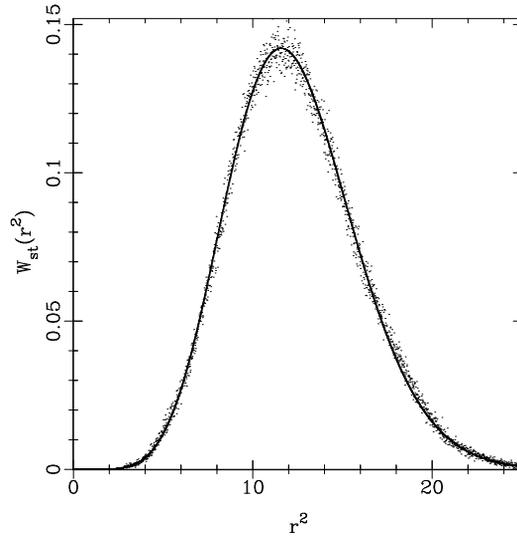


Figura 4.5: Confronto tra la funzione di Wigner stazionaria $W(u, \bar{u}; t = \infty)$ ottenuta analiticamente mediante la (2.30) e quella simulata facendo uso della proprietà di ergodicità, come descritto nel paragrafo 4.1.4. La funzione analitica è la linea continua, mentre la funzione simulata è rappresentata dai punti, che derivano da un istogramma a 2000 punti. Si osserva un perfetto accordo tra le due funzioni W , cosa che conferma la bontà delle routines di simulazione nel caso stazionario. È stata usata l'equazione di Fokker-Planck di Lugiato [2] con i parametri $C = 4$; $n_s = 1$; $\sigma_0 = 1$; $f = 1$, e l'equazione è stata fatta evolvere fino ad un tempo $t_{max} = \frac{12000}{\gamma}$.

4.2 Metodo del Quantum Jump.

In questo paragrafo si descrive il metodo del quantum jump, adatto a simulare e risolvere numericamente la master equation introdotta nel paragrafo 1.1. Si analizzeranno brevemente le formulazioni di Mølmer, Castin, Dalibard [26] e di Dum, Zoller e Ritsch [25]. Quest'ultima è quella che è stata utilizzata per le simulazioni numeriche che verranno presentate in questa tesi.

4.2.1 Descrizione del metodo del quantum jump

Metodo di Mølmer et al.:

L'evoluzione dello stato quantistico $\hat{\rho}(t)$ del sistema è descritta dalla master equation (1.5):

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_s, \hat{\rho}] + \sum_m \mathcal{D}[\hat{c}_m]\hat{\rho}, \quad (4.9)$$

dove \hat{c}_m sono generici operatori e \hat{H}_s l'hamiltoniana di sistema. Sulla base dell'equazione (4.9) si costruisce l'hamiltoniana non hermitiana

$$\hat{H} \stackrel{def}{=} \hat{H}_s - \frac{i\hbar}{2} \sum_m \hat{c}_m^+ \hat{c}_m,$$

utilizzando la quale, si fa evolvere il vettore di stato $|\psi(t)\rangle$ del sistema mediante l'equazione di Schrödinger

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle.$$

Per hamiltoniana \hat{H} indipendente dal tempo l'equazione di Schrödinger ha soluzione

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t}|\psi(t)\rangle.$$

Per δt infinitesimo si sviluppa in serie l'esponenziale, e si ottiene

$$|\psi(t + \delta t)\rangle \simeq (1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t)|\psi(t)\rangle. \quad (4.10)$$

Naturalmente nell'ambito della simulazione si utilizzerà un δt finito, introducendo così un errore sistematico. Sarà opportuno ripetere tutta la simulazione

utilizzando diversi valori per δt (solitamente tre o quattro valori distinti) e poi estrapolare a zero tutti i risultati ottenuti, in maniera identica a ciò che si fa nella simulazione dell'equazione di Fokker–Planck.

La funzione d'onda evoluta $|\psi(t + \delta t)\rangle$ non è più normalizzata, in quanto l'operatore di evoluzione $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t}$ non è unitario. La sua norma è

$$\begin{aligned} \langle \psi(t + \delta t) | \psi(t + \delta t) \rangle &\equiv \langle \psi(t) | \left(1 + \frac{i}{\hbar}\hat{H}^+\delta t\right) \left(1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t\right) | \psi(t) \rangle \stackrel{def}{=} \\ &\stackrel{def}{=} 1 - \delta p \end{aligned} \quad (4.11)$$

Il “difetto di norma” δp è la probabilità che nell'intervallo di tempo δt sia avvenuto un quantum jump. Infatti (al primo ordine) si ha

$$\delta p = \delta t \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \hat{H} - \hat{H}^+ | \psi(t) \rangle = \delta t \sum_m \langle \psi(t) | \hat{c}_m^+ \hat{c}_m | \psi(t) \rangle \stackrel{def}{=} \sum_m \delta p_m. \quad (4.12)$$

Il rate di quantum jump è proporzionale al valor medio sullo stato dell'operatore “numero” $\hat{c}^+ \hat{c}$, in maniera analoga al caso dell'emissione stimolata (che è proporzionale al numero di fotoni $\langle \psi | \hat{a}^+ \hat{a} | \psi \rangle$). Questo fenomeno di *damping* è proprio di tutte le master equations.

Si scelga un numero ϵ estratto da una distribuzione di probabilità uniforme con $0 \leq \epsilon \leq 1$. Grazie alla particolare distribuzione da cui proviene, questo numero avrà probabilità δp di essere minore di δp e probabilità $1 - \delta p$ di essere maggiore. Pertanto, se si desidera avere una probabilità di quantum jump pari a δp , è sufficiente compiere il quantum jump solo se $\delta p \geq \epsilon$. Nel caso in cui $\delta p < \epsilon$, il quantum jump non avviene.

È necessario selezionare il parametro δt con molta attenzione onde evitare che la probabilità δp risulti eccessivamente alta. Infatti per δt troppo grandi può accadere che in tale intervallo di tempo avvenga più di un quantum jump. Questa eventualità è assolutamente da evitare in quanto l'algoritmo descritto è in grado di gestire al più un quantum jump per ogni passo di integrazione δt . Paradossalmente per δt grandi si può arrivare ad ottenere probabilità δp (che è direttamente proporzionale al δt) maggiore di uno, cosa che fisicamente descrive il caso in cui sono avvenuti parecchi quantum jumps. Oltre alla necessità di scegliere un δt il più piccolo possibile compatibilmente con i tempi di calcolo, è opportuno anche riscalarlo con la dimensione dello

spazio di Hilbert su cui è definito il vettore di stato. Infatti, dalla (4.12) si vede che il δp è grossomodo direttamente proporzionale alla dimensione dello spazio.

Nel caso in cui il quantum jump avvenga (cioè nel caso in cui la proprietà $\delta p \geq \epsilon$ è verificata), il vettore di stato va ridotto usando uno degli operatori \hat{c}_m con probabilità $\frac{\delta p_m}{\delta p}$ e poi va normalizzato. Anche qui si utilizza un numero casuale ϵ' estratto da una distribuzione di probabilità uniforme per selezionare l'operatore da usare: se $\epsilon' \leq \frac{\delta p_1}{\delta p}$ allora si utilizza l'operatore \hat{c}_1 , altrimenti se $\epsilon' \leq \frac{\delta p_1 + \delta p_2}{\delta p}$ si utilizza l'operatore \hat{c}_2 e così via. Una volta così scelto l'operatore \hat{c}_m , bisogna utilizzarlo per ridurre il vettore d'onda

$$|\psi'(t)\rangle = \frac{\hat{c}|\psi(t)\rangle}{\langle\psi(t)|\hat{c}^+\hat{c}|\psi(t)\rangle},$$

ottenendo il vettore normalizzato al tempo t $|\psi'(t)\rangle$. Nel caso opposto, in cui la condizione $\delta p \geq \epsilon$ non è verificata, il quantum jump non avviene e ci si limita a normalizzare il vettore

$$|\psi'(t)\rangle = \frac{|\psi(t)\rangle}{\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle}$$

A questo punto si è ottenuto un vettore di stato normalizzato $|\psi'(t)\rangle$ che è il risultato di un quantum jump o semplicemente di una normalizzazione. L'algoritmo va iterato, utilizzando il $|\psi'(t)\rangle$ ottenuto facendo evolvere il sistema per δt successivi fino ad arrivare al tempo t finale dell'evoluzione.

Tutto il procedimento descritto va ripetuto più volte. Si otterrà una serie di vettori di stato $|\psi_s(t)\rangle$ al tempo finale, che in genere sono diversi fra loro (s rappresenta l'indice che distingue i vettori ottenuti mediante storie diverse). Al tempo t il vettore di stato del sistema sarà la media di tutti i vettori ottenuti dalle varie storie.

Dimostrazione: Si dimostra che la media sulle storie degli operatori densità è l'operatore densità che si ottiene a partire dalla master equation.

Data la matrice densità relativa alla traiettoria s al tempo t ($\hat{\rho}_s(t) = |\psi_s(t)\rangle\langle\psi_s(t)|$), al tempo $t + \delta t$ si avrà una normalizzazione con probabilità

δp o una riduzione mediante uno degli operatori \hat{c}_m con probabilità δp_m :

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_s(t + \delta t) &= (1 - \delta p) \frac{|\psi_s(t + \delta t)\rangle\langle\psi_s(t + \delta t)|}{(\langle\psi_s(t + \delta t)|\psi_s(t + \delta t)\rangle)^2} + \\ &+ \sum_m \delta p_m \frac{\hat{c}_m|\psi_s(t)\rangle\langle\psi_s(t)|\hat{c}_m^+}{(\langle\psi_s(t)|\hat{c}_m^+\hat{c}_m|\psi_s(t)\rangle)^2}.\end{aligned}$$

Usando la (4.11), la definizione di δp , δp_m e la (4.10), si ottiene

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_s(t + \delta t) &= (1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t)|\psi_s(t)\rangle\langle\psi_s(t)|(1 + \frac{i}{\hbar}\hat{H}^+\delta t) + \sum_m \hat{c}_m|\psi_s(t)\rangle\langle\psi_s(t)|\hat{c}_m^+ = \\ &\simeq \hat{\rho}_s(t) - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t\hat{\rho}_s(t) + \frac{i}{\hbar}\hat{\rho}_s(t)\hat{H}^+ + \sum_m \hat{c}_m\hat{\rho}_s(t)\hat{c}_m^+ = \\ &= \hat{\rho}_s(t) - \frac{i}{\hbar}\delta t[\hat{H}_s, \hat{\rho}_s(t)] + \delta t \sum_m \mathcal{D}[\hat{c}_m]\hat{\rho}_s(t).\end{aligned}$$

Per δt abbastanza piccoli si ha quindi

$$-\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_s, \hat{\rho}_s(t)] + \sum_m \mathcal{D}[\hat{c}_m]\hat{\rho}_s(t) = \frac{\hat{\rho}_s(t + \delta t) - \hat{\rho}_s(t)}{\delta t} \simeq \frac{d}{dt}\hat{\rho}_s(t).$$

Si è trovato che $\hat{\rho}_s(t)$ è soluzione della master equation a partire da uno stato puro. La soluzione generale sarà una mistura di traiettorie pure⁽³⁾.

$$\hat{\rho}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \hat{\rho}_s(t).$$

Metodo di Dum et al.:

Il metodo di Mølmer *et al.* necessita di una normalizzazione del vettore di stato ad ogni *time step* δt . Questo porta ad un errore numerico che si propaga ad ogni successiva normalizzazione. Dum, Zoller e Ritsch [25] propongono

³Quanto affermato è vero a patto di scegliere la medesima condizione iniziale, cioè $\hat{\rho}_s(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| \equiv \hat{\rho}(0) \quad \forall s$. Se la condizione iniziale è lo stato misto $\hat{\rho}(0) = |\psi_j(0)\rangle\langle\psi_j(0)|$ con probabilità P_j , allora è necessario usare come condizione iniziale la $\hat{\rho}_s(0) = |\psi_j(0)\rangle\langle\psi_j(0)|$ per una frazione pari a P_j del numero totale di storie simulate.

una variante del metodo, in cui la funzione d'onda viene normalizzata solo quando si ha un quantum jump.

In maniera analoga al metodo di Dum *et al.*, si estrae un numero casuale ϵ da una distribuzione uniforme e lo si confronta con il “difetto di norma” δp , dovuto all'evoluzione non unitaria del vettore di stato. Nel caso in cui sia soddisfatta la condizione $\epsilon \geq \delta p$ il quantum jump avviene e la funzione d'onda viene ridotta e poi normalizzata

$$|\psi_s(t)\rangle' = \frac{\hat{c}_m |\psi_s(t)\rangle}{\langle \psi_s(t) | \hat{c}_m | \psi_s(t) \rangle}.$$

Nel caso contrario, il sistema viene fatto evolvere ulteriormente sotto l'azione dell'hamiltoniana non hermitiana, fino a quando la condizione $\delta p \geq \epsilon$ non risulti soddisfatta.

In questo caso si dimostra che la probabilità che avvenga un quantum jump nell'intervallo di tempo macroscopico Δt è pari alla variazione Δp della norma del vettore di stato in tale intervallo di tempo.

4.2.2 Metodo del quantum jump applicato al laser ad un solo atomo.

In questo paragrafo si analizza l'applicazione del metodo presentato nel paragrafo 4.2.1 al caso del laser il cui modello è stato definito nel paragrafo 2.2. In questo caso la master equation è la (2.9), specializzata al caso monoatomico, cioè

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = & g[\hat{\sigma}_+ \hat{a} - \hat{\sigma}_- \hat{a}^+, \hat{\rho}(t)] + \left\{ \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 + \sigma_0) \mathcal{D}[\hat{\sigma}_+] + \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 - \sigma_0) \mathcal{D}[\hat{\sigma}_-] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(\gamma_{\perp} - \frac{\gamma_{\parallel}}{2} \right) \mathcal{D}[\hat{\sigma}_z] + \gamma n_{th} \mathcal{D}[\hat{a}^+] + \gamma (n_{th} + 1) \mathcal{D}[\hat{a}] \right\} \hat{\rho}(t) \end{aligned}$$

[con g parametro di accoppiamento di dipolo elettrico; γ tempo di vita medio del fotone in cavità; n_{th} numero medio di fotoni termici in cavità; σ_0 inversione di popolazione non saturata a regime; γ_{\parallel} rate di decadimento della polarizzazione atomica; γ_{\perp} rate di decadimento dell'inversione di popolazione; \hat{a} e \hat{a}^+ operatori di creazione e di distruzione del modo elettromagnetico risonante in cavità; $\hat{\sigma}_{\pm z}$ operatori di Pauli].

A partire dalla master equation scritta in questo modo è immediato il calcolo degli operatori \hat{c}_m , definiti dalla (4.9):

$$\begin{aligned}\hat{c}_1 &= \sqrt{\frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 + \sigma_0)} \hat{\sigma}_+, \\ \hat{c}_2 &= \sqrt{\frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 - \sigma_0)} \hat{\sigma}_-, \\ \hat{c}_3 &= \sqrt{\frac{1}{4}\left(\gamma_{\perp} - \frac{\gamma_{\parallel}}{2}\right)} \hat{\sigma}_z, \\ \hat{c}_4 &= \sqrt{\gamma n_{th}} \hat{a}^+, \\ \hat{c}_5 &= \sqrt{\gamma(n_{th} + 1)} \hat{a}.\end{aligned}$$

Usando questi si ottiene la hamiltoniana non hermitiana \hat{H} da utilizzare per fare evolvere il vettore di stato:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -i\hbar(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^+\hat{\sigma}_-) - \frac{i\hbar}{2} \left[\gamma(n_{th} + 1)\hat{a}^+\hat{a} + \gamma n_{th}\hat{a}^+\hat{a} + \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 - \sigma_0)\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_{\parallel}}{2}(1 + \sigma_0)\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ + \frac{1}{4}\left(\gamma_{\perp} - \frac{\gamma_{\parallel}}{2}\right) \right].\end{aligned}$$

Confronto numerico tra il metodo del quantum jump e l'evoluzione dell'equazione di Fokker–Planck.:

Il confronto tra la simulazione ottenuta a partire dall'equazione di Fokker–Planck e la simulazione ricavata mediante il metodo del quantum jump ha fornito risultati soddisfacenti, confermando la validità dell'equazione di Fokker–Planck anche nel caso di laser a un atomo. In figura 4.6 è riportato, a titolo di esempio, il risultato di una delle simulazioni compiute: si vede che la distribuzione di probabilità in uscita

$$P(n) = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle$$

ottenuta con il metodo del quantum jump è perfettamente compatibile con quella ottenuta con il metodo della Fokker–Planck. Le simulazioni di confronto sono state tutte eseguite per il caso stazionario.

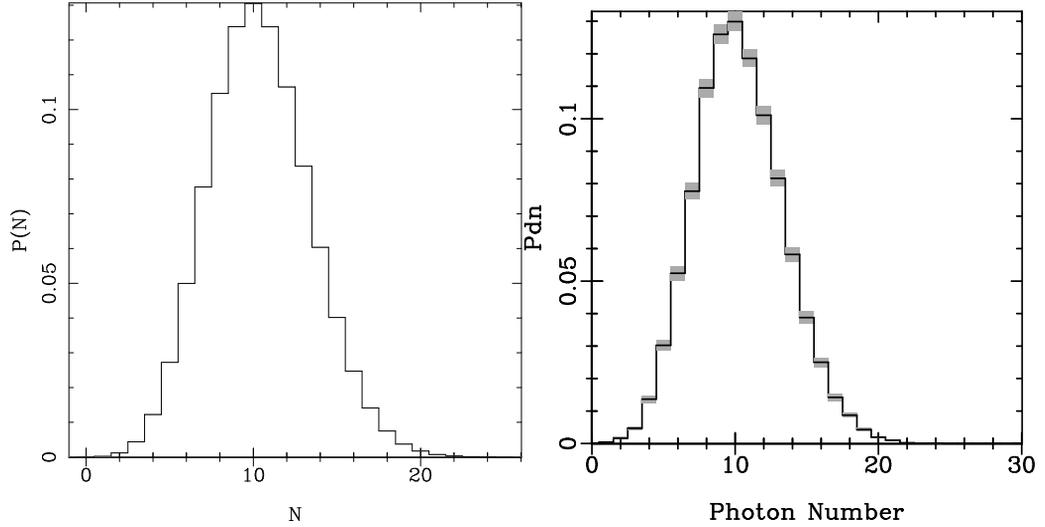


Figura 4.6: Confronto fra gli stati in uscita da un laser simulati mediante i due metodi di simulazione presentati in questa tesi. Nei grafici vengono presentate le distribuzioni di probabilità nel numero di fotoni. Il grafico a sinistra è ottenuto mediante la simulazione dell’equazione di Fokker–Planck di Lugiato [2], mentre il grafico di destra è stato ottenuto utilizzando il metodo del quantum jump. Si osserva che i due grafici sono molto simili. Nel grafico a sinistra non sono visualizzati gli errori statistici. I parametri del laser visualizzato sono $C = 2$; $\sigma_0 = 1$; $n_s = 3$; $f = 1$.

Il metodo del quantum jump è stato impiegato anche per esplorare i limiti di validità della Fokker–Planck. I risultati ottenuti mediante i due metodi di simulazione non sono più in accordo se non sono rispettate le condizioni richieste dall’approssimazione adiabatica e le condizioni sul tempo di traccia, introdotte nel paragrafo 3.1.

Capitolo 5

Risultati e conclusioni.

In questo capitolo verranno presentati i risultati ottenuti dalle simulazioni delle equazioni di laser introdotte nei capitoli precedenti. Viene data inoltre una breve panoramica sui metodi impiegati per ottenere tali risultati. Un breve paragrafo è dedicato agli sviluppi possibili degli studi compiuti per la presente tesi.

Era già stato dimostrato [1] e [4] che, in regimi di funzionamento ad alto numero medio di fotoni, l'amplificatore saturabile fosse in grado di battere il limite standard quantistico SQL (¹): in [1] è stata ottenuta una figura di rumore vicina a zero decibel. I risultati delle simulazioni in questa tesi hanno confermato questa caratteristica dell'amplificatore saturabile per regimi di lavoro "quantistici" (i.e. a basso numero medio di fotoni).

Nell'ambito di questa tesi è stato compiuto per la prima volta lo studio della *bit error rate* (introdotta nel paragrafo 3.2) dell'amplificatore laser saturabile ed è stato eseguito uno studio comparativo tra le caratteristiche dell'amplificatore saturabile e quelle del PIA ideale (*phase insensitive amplifier* introdotto nel paragrafo 3.4). Si è trovato che, nonostante la saturazione, le bit error rates ottenute si avvicinano a quelle del PIA. I risultati ottenuti mostrano, inoltre, che la figura di rumore definita dalla (3.3)

¹Lo *standard quantum limit* SQL è il limite teorico per amplificatori lineari in regime di funzionamento con intensi segnali coerenti in ingresso e alti guadagni. Lo SQL è 3 decibel. Questo risultato è stato ottenuto nel paragrafo 3.5.

$$\mathcal{R} \stackrel{def}{=} \frac{1}{\mathcal{G}^2} \frac{(\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle_{\text{bit } 1} + \langle \Delta \hat{n}^2 \rangle_{\text{bit } 0})_{out}}{(\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle_{\text{bit } 1} + \langle \Delta \hat{n}^2 \rangle_{\text{bit } 0})_{in}}$$

non è un parametro significativo per caratterizzare l'amplificatore saturabile e in genere qualunque altro dispositivo che modifichi in maniera sostanziale la "forma" della distribuzione in uscita. Nella definizione di \mathcal{R} compaiono infatti solamente i primi due momenti della distribuzione. Si è visto che questi non sono affatto sufficienti a caratterizzare il funzionamento del dispositivo nel caso di marcata non linearità. Infatti, il confronto fra PIA e amplificatore saturabile ha evidenziato che, nonostante che con quest'ultimo si possono ottenere figure di rumore molto inferiori, le bit error rates sono confrontabili o superiori. Gli amplificatori saturabili sono quindi amplificatori peggiori, in quanto introducono un maggior numero di errori nella trasmissione di dati. Questo è ad esempio il caso analizzato in figura 5.1, dove si confrontano i due tipi di dispositivi: l'amplificatore saturabile, pur avendo una figura di rumore di soli 1.04 decibel, ha una bit error rate di $.43 \cdot 10^{-2}$, mentre il PIA ideale che presenta lo stesso guadagno ha una figura di rumore di 2.35 decibel e una bit error rate di $.28 \cdot 10^{-2}$.

In tutti i casi analizzati le bit error rates degli amplificatori saturabili che sono stati simulati sono sempre superiori o paragonabili a quelle di amplificatori PIA.

Analisi qualitativa della saturazione del laser:

La saturazione derivante dall'equazione di Fokker–Planck del laser (2.20) non si è rivelata adatta a ridurre la bit error rate rispetto al PIA ideale. La causa principale di ciò è che la saturazione tende a tagliare la coda della distribuzione ad alto numero di fotoni, lasciando che tutta la parte a basso numero di fotoni sia amplificata (per guadagni non troppo elevati) in maniera pressapoco lineare. A parità di guadagno, pertanto, il bit zero nell'amplificatore saturabile viene amplificato di più che nel PIA.

Questo è molto evidente dal confronto fra i grafici presentati in figura 5.1, dove la coda della distribuzione relativa al bit zero arriva fino a $n \simeq 50$, mentre nel PIA di medesimo guadagno arriva a $n \simeq 15$. L'effetto della saturazione sulla coda ad alto numero di fotoni della distribuzione è osservabile in

figura 5.2, dove viene presentato il confronto tra un amplificatore saturabile che lavora in condizioni lineari (i.e. numero di fotoni di saturazione n_s molto grande) e lo stesso amplificatore in condizioni in cui la saturazione ha effetti evidenti. Il taglio della coda ad alto numero di fotoni porta ad un guadagno nettamente inferiore in condizioni di saturazione (si passa da un guadagno di 6.89 decibel ad un guadagno di 3.92 decibel). D'altra parte la figura di rumore si riduce drasticamente (passando da 3.09 decibel a -0.47 decibel), ma questo non influenza molto la bit error rate, perchè la zona di sovrapposizione tra le due curve non viene modificata molto dalla saturazione. Infatti, la bit error rate dei due amplificatori non è molto diversa (in condizioni lineari si ha una bit error rate pari a $0.3 \cdot 10^{-2}$, mentre in condizioni di saturazione si ha $0.12 \cdot 10^{-2}$), nonostante la grande differenza tra le figure di rumore nei 2 casi.

I due amplificatori sono inoltre confrontati con i PIA ideali di pari guadagno. Si osservi che in condizioni di funzionamento lineare il saturabile non si comporta affatto come un PIA ideale ⁽²⁾. Nel saturabile che lavora in condizioni lineari si ha infatti una maggiore amplificazione della spontanea, che si manifesta con una maggiore amplificazione dello stato di vuoto $|0\rangle$ (corrispondente allo stato di bit zero). Questo si manifesta in una figura di rumore leggermente inferiore (2.73 decibel) e in una bit error rate minore ($0.23 \cdot 10^{-2}$). Il confronto tra l'amplificatore in regime saturato e il PIA risulta, come già detto, in una figura di rumore superiore (il PIA ha figura di rumore di 2.19 decibel) e in una bit error rate inferiore, ma confrontabile ($0.11 \cdot 10^{-2}$).

La sequenza di figure in 5.3 presenta il caso di amplificatore che guadagna fino ad arrivare al regime ultrasaturante. Viene rappresentato in figura lo stato della radiazione a tempi diversi. Per tempi molto lunghi il segnale di ingresso viene amplificato molto al di sopra del numero di fotoni di saturazione n_s . In questo caso l'uscita non mantiene più la dipendenza dallo stato di ingresso e l'amplificatore si comporta come un laser a regime. Questo è un'esemplificazione del meccanismo della saturazione portato alle estreme con-

²Si ricorda che il PIA ideale è stato ricavato con la condizione di modo idler in stato di vuoto (cfr. paragrafo 3.3). L'amplificatore saturabile, dove l'idler è costituito dai gradi di libertà atomici, non soddisfa a questo requisito (ovvero, in generale, corrisponde ad un PIA con fotoni termici equivalenti).

sequenze. Un dispositivo di questo tipo non è ovviamente adatto a funzionare come amplificatore.

5.1 Procedimento per l'analisi dei dati.

Per la ricerca di minimi nella figura di rumore si è provveduto a generare un elevato numero di grafici bidimensionali della figura di rumore al variare dei parametri del laser. In figura 5.4 e 5.5 ne vengono presentati due esempi. I grafici bidimensionali visualizzano le curve di livello della figura di rumore \mathcal{R} e del guadagno \mathcal{G} graficati in funzione dell'ampiezza α del segnale coerente in ingresso $|\alpha\rangle$ e del tempo scalato con il tempo di vita medio del fotone in cavità γt .

Nel primo esempio è bene evidente un minimo nella figura di rumore. Una volta trovato il minimo si procede alla simulazione dell'amplificatore saturabile, utilizzando i parametri dell'amplificatore che corrisponda al minimo della figura di rumore. Una volta simulato l'amplificatore saturabile con questi parametri è possibile il confronto con il PIA (nell'esempio presentato la bit error rate è $0.6 \cdot 10^{-3}$ per l'amplificatore saturabile, mentre il PIA ha una bit error rate di $0.39 \cdot 10^{-3}$). Si noti l'effetto della saturazione nel grafico del guadagno: il guadagno aumenta solo fino ad un determinato istante di tempo, poi la saturazione lo blocca e tende a farlo diminuire.

Nel secondo esempio si lavora in regioni con un numero medio di fotoni molto basso e numero di fotoni di saturazione n_s molto piccolo. In questo regime di funzionamento non sono presenti minimi della figura di rumore \mathcal{R} , in quanto la saturazione agisce troppo presto sul bit uno, non permettendo un'amplificazione sufficiente a ridurre \mathcal{R} . In questo regime è possibile il calcolo della bit error rate a tutti i tempi e per tutti gli stati di ingresso. Non ci sono infatti problemi di convergenza numerica nel calcolo dei polinomi di Laguerre necessari per la valutazione della distribuzione di probabilità (cfr. il paragrafo 4.1.3). Viene pertanto presentato anche il grafico bidimensionale della bit error rate versus segnale coerente di ingresso e tempo di amplificazione. Si noti che essa è minima all'istante iniziale, cioè quando il segnale non è ancora stato amplificato, e cresce al crescere del tempo. Si ricorda che la linea di comunicazione (definita nel paragrafo 3.1) che si analizza nella presente tesi è priva di fenomeni di dissipazione e attenuazione del segnale. Sotto queste ipotesi, l'amplificatore può solo aumentare la bit error rate. L'utilizzo pratico

dell'amplificatore, infatti, è utile in presenza di dissipazione (o di rivelazione non ideale). Ha senso, comunque, un confronto fra i due tipi di amplificatore in assenza di dissipazione, in quanto la dissipazione mantiene coerenti gli stati della radiazione in ingresso.

Si può sintetizzare nel seguente modo il procedimento di analisi utilizzato: inizialmente si parte da uno "scanning" veloce (si usano pochi dati statistici nelle simulazioni Monte Carlo) in cui l'amplificatore è simulato con vari stati di ingresso e a tempi diversi. I dati ottenuti vengono visualizzati nei grafici bidimensionali, di cui si danno alcuni esempi in figura 5.4 e 5.5. Questi grafici consentono di ricavare i parametri (tempo e stato di ingresso) che permettano di avere un guadagno elevato e una bassa figura di rumore. Si procede ora a simulare gli amplificatori caratterizzati da questi parametri utilizzando una statistica con un numero di eventi maggiore. Il risultato ottenuto è confrontato con quelli (ottenuti analiticamente) dell'amplificatore PIA con il medesimo guadagno.

Il confronto della bit error rate \mathcal{B} è compiuto in maniera automatica. A partire dal grafico bidimensionale del guadagno, si calcolano i \mathcal{B} relativi agli amplificatori PIA di medesimo guadagno e li si confronta con i \mathcal{B} ottenuti dalla simulazione. In caso di \mathcal{B} minore o confrontabili per un dato segnale di ingresso ad un dato tempo, si procede ad una simulazione più approfondita (i.e. con più statistica).

5.2 Sviluppi ulteriori.

La linea di ricerca seguita in questa tesi presenta la possibilità di una prosecuzione con alcuni sviluppi.

Nelle routines preparate si calcolano solo i termini diagonali (su una base di autostati $|n\rangle$ dell'operatore numero) della matrice densità $\hat{\rho}$ di sistema in uscita dal laser. Con poche modifiche è possibile ottenere la matrice densità completa in uscita dal dispositivo. A partire dalle matrici densità in ingresso $\hat{\rho}(t=0)$ e in uscita $\hat{\rho}(t)$, si può cercare di ottenere uno liouvilliano efficace per il laser, eliminando dallo liouvilliano i gradi di libertà atomici.

Si intende simulare misure di tipo *homodina* all'uscita del laser e fare esperimenti di “tomografia quantistica” sulla base dei dati simulati. Questo è reso possibile dalla simulazione della matrice densità in uscita.

Si intende, inoltre, esplorare meccanismi di saturazione alternativi a quello derivante dall'equazione di Fokker–Planck del laser, come ad esempio, saturazione da potenza in presenza di allargamento inhomogeneo. Questo può essere fatto sulla base di equazioni di Fokker–Planck fenomenologiche, o, progetto più ambizioso, derivando l'equazione di Fokker–Planck *ab initio*.

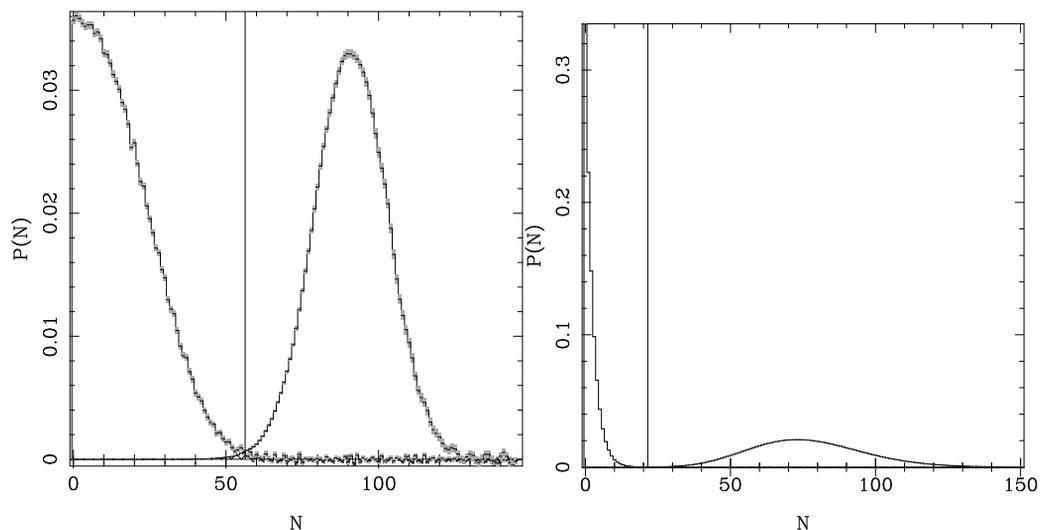


Figura 5.1: Confronto fra un amplificatore saturabile con figura di rumore molto bassa (grafico a destra $\mathcal{R} = 1.04$ db) e l'amplificatore PIA ideale che abbia il medesimo guadagno (grafico a sinistra $\mathcal{R} = 2.35$ db). Questo risulta avere una figura di rumore molto più alta. La bit error rate del PIA è migliore. Nei grafici la curva a sinistra si riferisce allo stato di uscita di bit zero, quello di destra allo stato di bit uno. La retta verticale che le separa individua la soglia che ottimizza la bit error rate (che in questi grafici non è apprezzabile). I parametri dell'amplificatore simulato sono $C = 2$; $n_s = 70$; $\sigma_0 = 1$; $\gamma t = .2$; Input coerente $|\alpha\rangle$ con $\alpha = 5$. È stata usata l'equazione di Fokker-Planck di Lugiato [2].

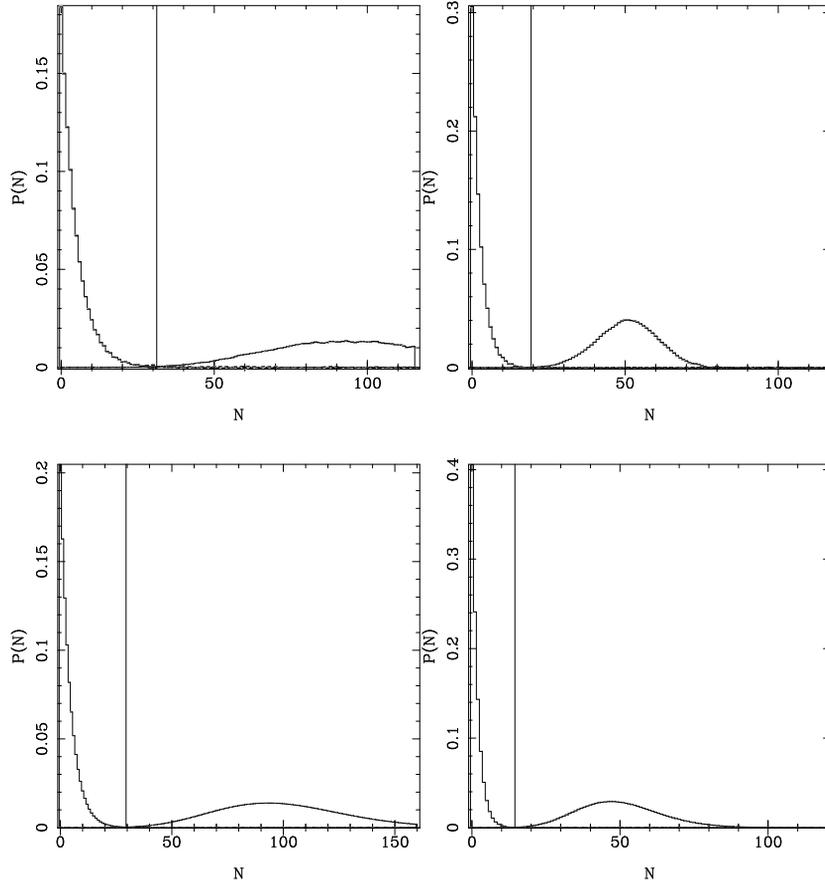


Figura 5.2: I due grafici in alto descrivono un confronto tra diversi regimi di funzionamento per un amplificatore saturabile. In alto a sinistra l'amplificatore saturabile lavora in condizioni di linearità, mentre in alto a destra lo stesso amplificatore è stato simulato in condizioni di saturazione. Si noti il fenomeno di troncamento della coda ad alto numero di fotoni della distribuzione. I due grafici in basso sono gli amplificatori PIA ideali di uguale guadagno. Si noti che l'amplificatore saturabile in condizioni di lavoro lineare non ha le medesime caratteristiche di un PIA ideale. I parametri usati per gli amplificatori simulati sono $C = 4.5$; $N = 55$; $\sigma_0 = 1$; $\gamma t = 0.1$; lo stato coerente $|\alpha\rangle$ ha $\alpha = 4.4296$, mentre il numero di fotoni di saturazione è $n_s = 10000$ per quello in alto a sinistra e $n_s = 55$ per quello in alto a destra.

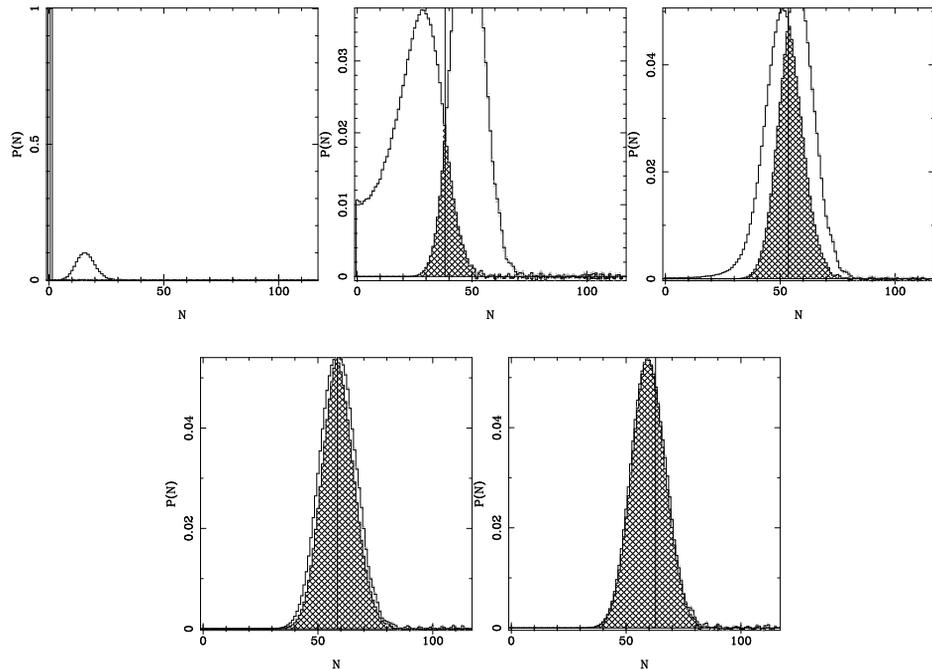


Figura 5.3: Sequenza che rappresenta a tempi diversi il segnale che evolve nell'amplificatore. Si noti che per tempi molto lunghi si ha saturazione molto forte: il guadagno si annulla e lo stato in uscita non dipende più dallo stato di ingresso, la bit error rate diventa quindi pari a uno. Questo dispositivo ha il solo scopo di esemplificare il meccanismo della saturazione. I parametri della simulazione sono $n_s = N = 20$; $C = 2$; $\sigma_0 = 1$; $\alpha = 4$ e γt che varia tra 0 e 10.

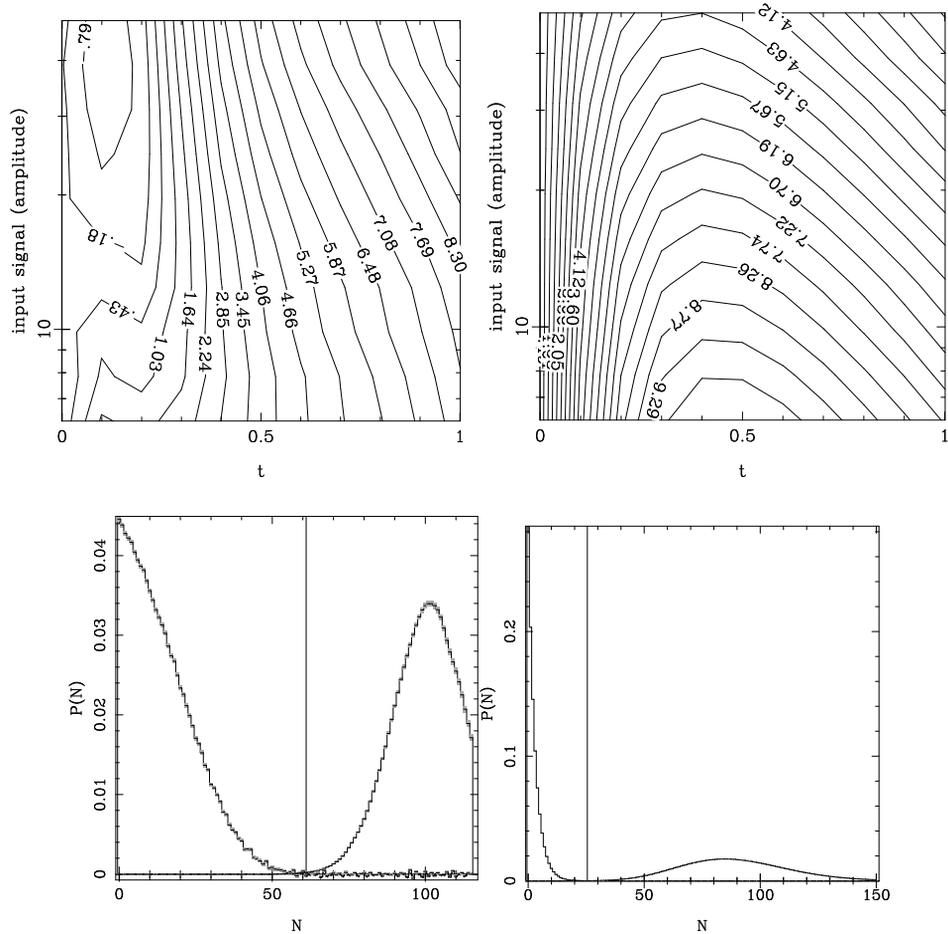


Figura 5.4: Esempio di grafici bidimensionali per lo studio delle caratteristiche degli amplificatori saturabili. Il grafico in alto a sinistra è la figura di rumore versus tempo e intensità dello stato coerente di ingresso. Il grafico in alto a destra è il guadagno. In basso a sinistra viene presentata il grafico dell'amplificatore con i parametri scelti in modo che il punto di lavoro sia in un punto con bassa figura di rumore e guadagno accettabile. In basso a destra c'è il PIA con il medesimo guadagno. I parametri dell'amplificatore sono $C = 4.5$; $n_s = 55$; $N = 10$; $\sigma_0 = 1$. Per il grafico in basso è stato usato lo stato di ingresso $|\alpha\rangle$ con $\alpha = 4.97$, al tempo $\gamma t = 0.2$.

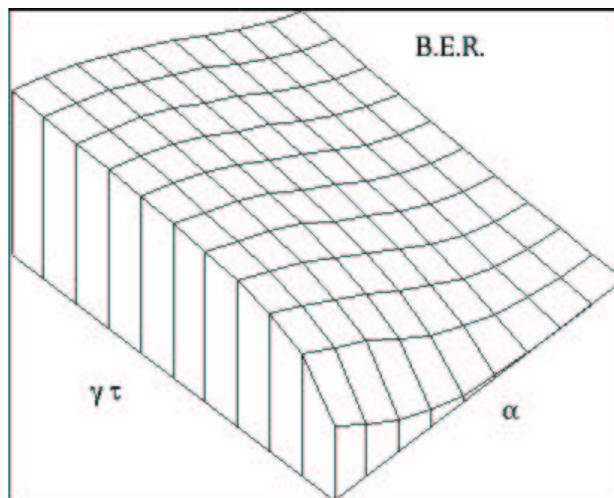
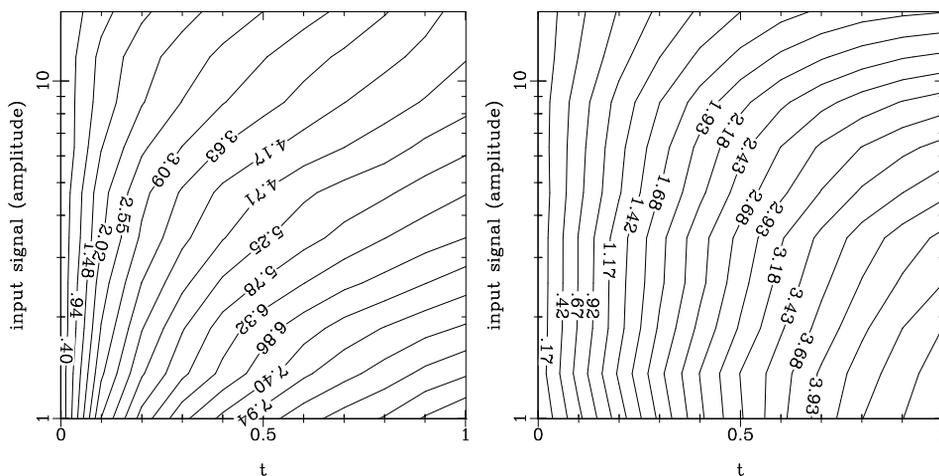


Figura 5.5: Altro esempio di grafici bidimensionali per lo studio delle caratteristiche degli amplificatori saturabili. Anche qui il grafico in alto a sinistra è la figura di rumore versus tempo e stato coerente di ingresso. Il grafico in alto a destra è il guadagno. In basso viene raffigurata la bit error rate. Si noti che è minima (praticamente nulla) per alti segnali di ingresso e a tempi iniziali (i.e. bassa amplificazione), mentre cresce al crescere dell'amplificazione. I parametri dell'amplificatore sono $C = 1$; $n_s = 50$; $\sigma_0 = 1$. È stata usata l'equazione di Fokker-Planck di Lugiato [2].

Bibliografia

- [1] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, M. G. A. Paris, Physical Review letters **73** 3187 (1994)
- [2] L. A. Lugiato, F. Casagrande and L. Pizzuto, Phys. Rev. A **26** 3438 (1982).
- [3] Fritz Haake, Maciej Lewenstein, Phys. Rev. A **27** 1013 (1983)
- [4] Chiara Macchiavello, Tesi di Dottorato, A.A. 1993/1994 Tutore G. M. D'Ariano, Coordinatore Sergio P. Ratti.
- [5] Angelo Zucchetti, Tesi di Laurea A.A. 1993-1994 Relatore G. M. D'Ariano
- [6] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, Phys. Rev. A **48**, 3947 (1993)
- [7] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, M. G. A. Paris, Information gain in quantum communication channels , in Quantum Communication and Measurement, ed. V. P. Belavkin, O. Hirota and R. L. Hudson, Plenum Press (New York and London 1995), pag. 339
- [8] Fritz Haake, Maciej Lewenstein, Z. Phys. B **48** 37 (1982)
- [9] G. M. D'Ariano, Identities, section 8.13, lavoro non pubblicato.
- [10] Fritz Haake, Mikhail Kolobov Phys. Rev. Lett. **71**, 995 (1993)
- [11] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, S. Moroni, Modern Physics Letters B **8** No. 4 (1994) pg. 239

- [12] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, in Computer Simulations in Nonlinear Optics: CSNO 1993 International Workshop, V. L. Derbov and S.K. Potapov Editors, Proc. SPIE 2098 (1994), pg. 47
- [13] C. Ginzell, H.J. Briegel, U. Martini, B. Englert, A. Schenzle, Phys. Rev. A **48**,732 (1993)
- [14] R. J. Glauber, Optical coherence and photon statistics. Les Houches 1964.
- [15] G. Orfino, tesi di Laurea A.A. 93-94 Relatore G. M. D'Ariano
- [16] H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. **56**, 2176 (1986)
- [17] H. P. Yuen, Phys. Lett. **113A**, 405 (1986)
- [18] H. P. Yuen, Opt. Lett. **12**, 789 (1987)
- [19] G. M. D'Ariano, Phys. Rev. A **45**, 3224 (1992)
- [20] O. Nilsson, A. Karlsson, J. P. Poizat, E. Berglind, Phys. Rev. Lett. **76**, 1972 (1996)
- [21] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, M. Paris, Phys. Rev. Lett. **76**, 1973 (1996)
- [22] G. M. D'Ariano, N. Sterpi, A. Zucchetti, Phys. Rev. Lett. **74** 900 (1995)
- [23] G. M. D'Ariano, R. Seno, N. Sterpi, J. Opt. Soc. Am. B, **12** 384 (Feb. 1995)
- [24] G.Lindblad, Commun. Math. Phys. **48**, 199 (1976)
- [25] R.Dum, P.Zoller and H.Ritsch, Phys. Rev. A **45**, 4879 (1992).
- [26] K. Mølmer, Y. Castin, J. Dalibard, J. Opt. Soc. Am. B **10**, 524 (1993)
- [27] H.Carmichael, *An Open System Approach to Quantum Optics*, Cap. 1, Springer-Verlag, Heidelberg (1993).
- [28] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of integrals, series, and products. Academic Press, inc.